KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE 18.05.2017
Fakultät für Mathematik
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Lars Machinek

Lösungsvorschlag zum 2. Übungsblatt

Analysis II im SS17

Aufgabe 5 (K) (a) Untersuchen Sie jeweils, ob die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ einen Grenzwert besitzt für $(x,y) \to (0,0)$, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

$$1) \quad f(x,y) = \frac{x^4 + |y|}{\sqrt{x^4 + |y| + 1} - 1},$$
$$2) \quad f(x,y) = \frac{yx}{\mathrm{e}^{y^2} - 1 + x^2}.$$

(b) Welche der folgenden Funktionen sind im Punkt $(0,0)$ stetig?

$$1) \quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad (x,y) \mapsto \begin{cases} (1 + |xy|)^{\frac{1}{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
$$2) \quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} \sin(x-y), & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Lösung zu Aufgabe 5 (a) 1) Wir behaupten, dass der Funktionsgrenzwert existiert. Mit Hilfe der dritten binomischen Formel lässt sich $f(x,y)$ schreiben als

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{(x^4 + |y|)\,(\sqrt{x^4 + |y| + 1} + 1)}{(\sqrt{x^4 + |y| + 1} - 1)\,(\sqrt{x^4 + |y| + 1} + 1)} = \frac{(x^4 + |y|)\,(\sqrt{x^4 + |y| + 1} + 1)}{x^4 + |y| + 1 - 1} \\ &= \sqrt{x^4 + |y| + 1} + 1. \end{aligned}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung definiert eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}^2$. Somit gilt

$$\lim_{(x,y)\to 0} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to 0} \sqrt{x^4 + |y| + 1} + 1 = \sqrt{0^4 + |0| + 1} + 1 = 2.$$

(a) 2) Diese Funktionsgrenzwert existiert nicht. Wir geben zwei Nullfolgen (x_k, y_k) an deren „Bildfolgen“ $f(x_k, y_k)$ verschiedene Grenzwerte haben.

Zum einen betrachten wir die Nullfolge mit den Gliedern $(x_k, y_k) = (0, \frac{1}{k})$ für $k \in \mathbb{N}$. Hier haben wir

$$f(0, \tfrac{1}{k}) = 0 \to 0 \quad \text{für } k \to \infty.$$

Zum anderen betrachten wir die durch $(x_k, y_k) = (\frac{1}{\sqrt{k}}, \frac{1}{\sqrt{k}})$ für $k \in \mathbb{N}$ gegebene Folge. Für diese erhalten wir

$$f(\frac{1}{\sqrt{k}}, \frac{1}{\sqrt{k}}) = \frac{(\frac{1}{\sqrt{k}})^2}{\exp((\frac{1}{\sqrt{k}})^2) - 1 + (\frac{1}{\sqrt{k}})^2} = \frac{\frac{1}{k}}{\exp(\frac{1}{k}) - 1 + \frac{1}{k}}.$$

Die Regel von L'Hospital liefert (Voraussetzungen prüfen!)

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k}}{\exp(\frac{1}{k}) - 1 + \frac{1}{k}} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\mathrm{e}^t - 1 + t} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{1}{\mathrm{e}^t + 1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Da die Grenzwerte verschieden sind, folgt die Behauptung.

(b) 1) Wir behaupten, dass f im Punkt $(0,0)$ nicht stetig ist. Um das nachzuweisen betrachte

$$f(x,x) = (1+x^2)^{\frac{1}{2x^2}} = \exp\left(\frac{1}{2x^2}\log(1+x^2)\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\frac{\log(1+x^2)}{x^2}\right)$$

für $x \neq 0$. Wir werden beweisen, dass

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{1}{2}\frac{\log(1+x^2)}{x^2}\right) \neq f(0,0)$$

Dazu betrachten wir zuerst das Argument der Exponentialfunktion. Da $\lim_{x\to 0}\log(1+x^2) = \log(1) = 0$ und $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ und die durch $\log(1+x^2)$ und x^2 gegebenen Funktion differenzierbar sind auf $(0,\infty)$, können wir die Regel von L'Hospital anwenden. Sie

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}2x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x^2} = 1$$

liefert, denn der Grenzwert auf der rechten Seite existiert. Wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion erhalten wir jetzt

$$\lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{1}{2}\frac{\log(1+x^2)}{x^2}\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x^2)}{x^2}\right) = \exp(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\mathrm{e}} \neq f(0,0).$$

Das zeigt, dass f nicht stetig ist in $(0,0)$.

(b) 2) Die Funktion f ist im Punkt $(0,0)$ stetig. Zunächst gilt für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ die Abschätzung $0 \leq (|x|-|y|)^2 = x^2+y^2-2|xy|$ und somit

$$\left|\frac{2xy}{x^2+y^2}\right| = \frac{2|xy|}{x^2+y^2} \leq 1.$$

Sei jetzt $((x_k,y_k))$ eine Nullfolge in $\mathbb{R}^2$. Wir müssen nachweisen, dass $\lim_{k\to\infty}|f(x_k,y_k)-f(0,0)| = 0$. Da $(0,0)$ ein Häufungspunkt von $\mathbb{R}^2$ ist, reicht es dabei anzunehmen, dass (x_k,y_k) in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ liegt für alle $k \in \mathbb{N}$.
Offenbar ist die Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $(x,y) \mapsto x-y$ stetig. Da auch der Sinus stetig ist erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 \leq |f(x_k,y_k)-f(0,0)| = |f(x_k,y_k)| &= \left|\frac{2xy}{x^2+y^2}\right| |\sin(x_k-y_k)| \\ &\leq |\sin(x_k-y_k) - \underbrace{\sin(0)}_{=0}| \to 0 \quad \text{für } k\to\infty. \end{aligned}$$

Mit dem Einschließungskriterium folgt die Behauptung.

Aufgabe 6 (K) (a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung der Funktion

$$g : \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \neq 0\} \to \mathbb{R}; \quad g(x,y,z) = \tfrac{x\mathrm{e}^y}{z}.$$

(b) Untersuchen Sie die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit und partielle Differenzierbarkeit im Punkt $(0,0)$ und geben Sie gegebenenfalls den Gradienten an.

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{4xy}{x^2+y^2}\sin(xy^2-x^2y), & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

(c) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3-x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

partiell differenzierbar ist und bestimmen Sie $\frac{\partial f}{\partial x}$ sowie $\frac{\partial f}{\partial y}$. Weisen Sie nach, dass diese beiden Ableitungen im Punkt $(0,0)$ nicht stetig sind.

Lösung zu Aufgabe 6 (a) Die Funktion g ist offenbar bezüglich jeder Variable stetig differenzierbar. Mit den Ableitungsregeln aus Analysis I erhalten wir

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = \tfrac{\mathrm{e}^y}{z}, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) = \tfrac{x\mathrm{e}^y}{z}, \qquad \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) = -\tfrac{x\mathrm{e}^y}{z^2},$$

und hieraus weiter

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial x}(x,y,z) = 0, && \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x,y,z) = \tfrac{\mathrm{e}^y}{z}, && \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial x}(x,y,z) = -\tfrac{\mathrm{e}^y}{z^2},\\
&\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y,z) = \tfrac{\mathrm{e}^y}{z}, && \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial y}(x,y,z) = \tfrac{x\mathrm{e}^y}{z}, && \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial y}(x,y,z) = -\tfrac{x\mathrm{e}^y}{z^2},\\
&\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z}(x,y,z) = -\tfrac{\mathrm{e}^y}{z^2}, && \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z}(x,y,z) = -\tfrac{x\mathrm{e}^y}{z^2}, && \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial z}(x,y,z) = \tfrac{2x\mathrm{e}^y}{z^3}.
\end{aligned}$$

für alle $(x,y,z) \in D$.

(b) Behauptung: Die Funktion g ist in $(0,0)$ stetig und partiell differenzierbar mit $(\operatorname{grad} g)(0,0) = (0\ \ 0)$. Analog zum Vorgehen in der Lösung zu Aufgabe 5 (b) 2) zeigt man, dass $4|xy| \leq 2(x^2+y^2)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Das impliziert

$$\begin{aligned}
|g(x_k,y_k)| &= 2\left|\frac{4x_k y_k}{2(x_k^2+y_k^2)}\right| |\sin(x_k y_k^2 - x_k^2 y_k)| \leq 2|x_k y_k^2 - x_k^2 y_k|\\
&\leq 2\big(|x_k y_k^2| + |x_k^2 y_k|\big) \to 0 \quad \text{für } k \to \infty.
\end{aligned}$$

für jede Nullfolge $((x_k,y_k))$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Es folgt, dass g stetig ist in $(0,0)$, denn $(0,0)$ ist ein Häufungspunkt von $\mathbb{R}^2$.

Um die partielle Differenzierbarkeit von g nach x im Punkt $(0,0)$ zu prüfen, stellen wir den Differenzenquotient der Funktionen $g(\,\boldsymbol{\cdot}\,,0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto g(x,0)$ im Punkt 0 auf. Das heißt, für $h \neq 0$ betrachten wir

$$\tfrac{1}{h}\big(g(h,0) - g(0,0)\big) = \frac{1}{h}\Big(\frac{h \cdot 0}{0+h^2}\sin(h \cdot 0^2 - h^2 \cdot 0)\Big) = 0.$$

Offensichtlich konvergiert dieser Ausdruck für $h \to 0$. Das bedeutet, dass $g_x(0,0) = 0$.

Für die partielle Ableitung von g im Punkt $(0,0)$ in Richtung von y betrachtet man analog den Differenzenquotienten $g(0,\,\boldsymbol{\cdot}\,) : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ y \mapsto g(0,y)$. Wie oben erhalten wir $g_y(0,0) = 0$. Somit existieren beide partiellen Ableitungen in $(0,0)$. Der Gradient von g in $(0,0)$ ist

$$(\operatorname{grad} g)(0,0) = \big(g_x(0,0)\ \ g_y(0,0)\big) = (0\ \ 0).$$

(c) Sei zuerst $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Dann ist f als Quotient von partiell differenzierbaren Funktionen im Punkt (x,y) partiell differenzierbar. Die Quotientenregel liefert

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-2xy(x^2+y^2) - (y^3 - x^2 y)2x}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{4xy^3}{(x^2+y^2)^2}.$$

Analog ergibt sich

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(3y^2 - x^2)(x^2+y^2) - (y^3 - x^2 y)2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4x^2y^2 - x^4 + y^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

Im Punkt $(0,0)$ rechnen wir wieder direkt die Definition der partiellen Ableitung nach: Es gilt

$$\frac{1}{h}\big(f(h,0) - f(0,0)\big) = \frac{0-0}{h} = 0 \to 0 \quad \text{für } h \to 0.$$

Also ist f in $(0,0)$ partiell nach x differenzierbar mit $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. Des weiteren gilt

$$\frac{1}{h}\big(f(0,h) - f(0,0)\big) = \frac{1}{h}\frac{h^3 - 0}{0 + h^2} = 1 \to 1 \quad \text{für } h \to 0.$$

Hieraus folgt, dass f in $(0,0)$ partiell nach y differenzierbar ist mit $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$.

Die partiellen Ableitungen sind in $(0,0)$ nicht stetig, denn es gelten

$$\frac{\partial f}{\partial x}\big(\tfrac{1}{k}, \tfrac{1}{k}\big) = -\frac{4k^{-4}}{(k^{-2} + k^{-2})^2} = -1 \to -1 \neq 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \quad \text{für } k \to \infty$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial y}\big(\tfrac{1}{k}, 0\big) = \frac{0 - k^{-4} + 0}{(k^{-2} + 0)^2} = -1 \to -1 \neq 1 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \quad \text{für } k \to \infty.$$

Aufgabe 7 Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass die partiellen Ableitungen $f_{xy}(0,0)$ und $f_{yx}(0,0)$ existieren und berechnen Sie diese.

Lösung zu Aufgabe 7 Sei zuerst $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Nach der Quotientenregel ist f in solchen Punkten nach x differenzierbar mit Ableitung

$$f_x(x,y) = \frac{(3x^2y - y^3)(x^2 + y^2) - (x^3y - xy^3)2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}$$

Mit Hilfe des Differenzenquotienten sieht man sofort, dass f auch in $(0,0)$ nach x differenzierbar ist mit

$$f_x(0,0) = 0.$$

Die Existenz der partiellen Ableitung $f_{yx}(0,0)$ folgt aus der Konvergenz des Differenzenquotienten:

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h \to 0} \tfrac{1}{h}\big(f_x(0,h) - f_x(0,0)\big) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\frac{h(0^4 + 40^2h^2 - h^4)}{(0^2 + h^2)^2} = \lim_{h \to 0} -1 = -1.$$

Auf die gleiche Weise wie oben erhalten wir

$$f_y(x,y) = \frac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2} = -f_x(y,x)$$

für $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ sowie $f_y(0,0) = 0$. Es folgt

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{h \to 0} \tfrac{1}{h}\big(f_y(h,0) - f_y(0,0)\big) = \lim_{h \to 0} \tfrac{1}{h} f_y(h,0) = -\lim_{h \to 0} \tfrac{1}{h} f_x(0,h) = -(-1) = 1.$$

Beachte, dass $1 = f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0) = -1$.

Aufgabe 8 (a) Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ nicht leer und $f : D \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Erinnerung für eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^m$ ist $f^{-1}(M) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \in M\}$.

1) Zunächst sei D offen. Zeigen Sie dass die folgenden zwei Aussagen äquivalent sind.

(i) f ist stetig.

(ii) Für jede offene Menge $O \subseteq \mathbb{R}^m$ ist $f^{-1}(O)$ offen.

2) Sei D jetzt abgeschlossen. Zeigen Sie, dass auch die folgenden zwei Aussagen äquivalent sind.

(i) f ist stetig.

(iii) Für jede abgeschlossene Menge $A \subseteq \mathbb{R}^m$ ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen.

(b) Sei $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $d \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie mit Hilfe von (a):

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid x \cdot v < d\} \quad \text{ist offen} \qquad \text{und} \qquad \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \cdot v \leq d\} \quad \text{ist abgeschlossen.}$$

Lösung zu Aufgabe 8 (a) 1) Sei D offen. Als erstes zeigen wir die Implikation (i) $\Longrightarrow$ (ii). Sei also f stetig und $O \subseteq \mathbb{R}^m$ offen. Wir wählen ein beliebiges $x_0 \in f^{-1}(O)$ und setzen $y_0 := f(x_0)$. Dann ist $y_0 \in O$ und weil O offen ist, gibt es einen Radius $\tilde{r} > 0$ so, dass die Umgebung $U_{\tilde{r}}(y_0)$ in O enthalten ist, d.h. $U_{\tilde{r}}(y_0) \subseteq O$. Da f stetig ist finden wir zu $\tilde{r} > 0$ einen weiteren Radius $r > 0$ derart, dass für alle $x \in D$ mit $\|x_0 - x\| < r$ gilt $\|f(x_0) - f(x)\| < \tilde{r}$. Wir können r so klein wählen, dass $U_r(x_0) \subseteq D$ gilt, denn D ist offen. Das bedeutet $f\big(U_r(x_0)\big) \subseteq U_{\tilde{r}}(y_0)$ oder anders gesagt $U_r(x_0) \subseteq f^{-1}(U_{\tilde{r}}(y_0)) \subseteq f^{-1}(O)$. Weil x_0 beliebig war folgt, dass $f^{-1}(O)$ offen ist.

Um die Implikation (ii) $\Longrightarrow$ (i) zu beweisen, nehmen wir an $f^{-1}(O)$ sei offen für jede offene Menge $O \subseteq \mathbb{R}^m$. Zu $x_0 \in D$ betrachten wir $y_0 = f(x_0)$. Sei $\varepsilon > 0$. Die Umgebung $U_\varepsilon(y_0) \subseteq \mathbb{R}^m$ ist offen und somit ist auch $f^{-1}(U_\varepsilon(y_0)) \subseteq D$ offen. Da $x_0 \in f^{-1}(U_\varepsilon(y_0))$ finden wir ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(x_0) \subseteq f^{-1}(U_\varepsilon(y_0))$. Das bedeutet aber $f\big(U_\delta(x_0)\big) \subseteq U_\varepsilon(y_0)$ beziehungsweise

$$\forall x \in D \ : \ \|x_0 - x\| < \delta \implies \|f(x_0) - f(x)\| < \varepsilon.$$

Wir haben also die ε-δ-Charakterisierung der Stetigkeit für f nachgerechnet.

(a) 2) Für den Beweis der Implikation (i) $\Longrightarrow$ (iii) sei f stetig. Weiter sei $A \subseteq \mathbb{R}^m$ abgeschlossen und (x_k) eine konvergente Folge in $f^{-1}(A)$. Den Grenzwert bezeichnen wir mit x_0. Es ist zu zeigen, dass x_0 in $f^{-1}(A)$ liegt. Da D abgeschlossen ist gilt $x_0 \in D$. Wir definieren $y_k := f(x_k)$ und $y_0 := f(x_0)$. Dann haben wir $y_k \in A$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ und weil f stetig ist, konvergiert die Folge (y_k) gegen y_0. Weil A abgeschlossen ist, folgt $y_0 \in A$ und somit $x_0 \in f^{-1}(A)$. Das bedeutet, dass $f^{-1}(A)$ abgeschlossen ist.

Schließlich zeigen wir die Implikation (iii) $\Longrightarrow$ (i). Wir nehmen an $f^{-1}(A)$ sei abgeschlossen für jede abgeschlossene Menge $A \subseteq \mathbb{R}^m$. Sei (x_k) eine konvergente Folge in D mit Grenzwert $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Da D abgeschlossen ist haben wir $x_0 \in D$. Angenommen $\|f(x_k) - f(x_0)\|$ konvergiere nicht gegen 0 für $k \to \infty$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine Teilfolge (x_{k_l}) von (x_k) so, dass

$$\|f(x_{k_l}) - f(x_0)\| \geq \varepsilon \quad \text{für alle } l \in \mathbb{N}.$$

Das bedeutet $f(x_{k_l}) \in \mathbb{R}^m \setminus U_\varepsilon(f(x_0))$ für alle $l \in \mathbb{N}$. Als Komplement einer offenen Menge ist die Menge $\mathbb{R}^m \setminus U_\varepsilon(f(x_0))$ ist abgeschlossen. Sie enthält die konvergente Folge (x_{k_l}) aber nicht deren Grenzwert x_0. Ein Widerspruch. Also konvergiert $f(x_k)$ gegen $f(x_0)$ für $k \to \infty$.

(b) Sei $v \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Das Skalarprodukt definiert eine stetige Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; $f(x) = x \cdot v$. Der Definitionsbereich $\mathbb{R}^n$ ist sowohl offen als auch abgeschlossen. Ist $d \in \mathbb{R}$, dann ist $(-\infty, d)$ offen und $(-\infty, d]$ abgeschlossen. Mit Teil (a) folgt jetzt

$$\begin{aligned} &\{x \in \mathbb{R}^n \mid x \cdot v < d\} = f^{-1}((-\infty, d)) \quad \text{ist offen} \qquad \text{und} \\ &\{x \in \mathbb{R}^n \mid x \cdot v \leq d\} = f^{-1}((-\infty, d]) \quad \text{ist abgeschlossen.} \end{aligned}$$