KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE 24.05.2017

Fakultät für Mathematik
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Lars Machinek

Lösungsvorschlag zum 3. Übungsblatt

Analysis II im SS17

Aufgabe 9 (K) (a) Seien $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} \sin(x-y) \\ \cos(x-y) \\ y\sinh(x) \end{pmatrix}, \quad \text{für } (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

$$g(u,v,w) = \begin{pmatrix} \log(1+u^2+v^2) \\ w^2 - uv \end{pmatrix}, \quad \text{für } (u,v,w) \in \mathbb{R}^3.$$

Berechnen Sie die Jacobimatrizen von f, g und $g \circ f$.

(b) Es sei $n \in \mathbb{N}$, $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := x \cdot (Mx)$. Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}^n$ differenzierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung $f'(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$. Verzichten Sie dabei auf die Berechnung der partiellen Ableitungen von f.

Lösung zu Aufgabe 9 (a) Es ist klar, dass f und g stetig partiell differenzierbar sind auf $\mathbb{R}^2$ beziehungsweise $\mathbb{R}^3$. Mit der Produkt- und der Kettenregel aus Analysis 1 berechnen wir die Jacobimatrizen

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x-y) & -\cos(x-y) \\ -\sin(x-y) & \sin(x-y) \\ y\cosh(x) & \sinh(x) \end{pmatrix} \quad \text{für } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

und

$$g'(u,v,w) = \begin{pmatrix} \frac{2u}{1+u^2+v^2} & \frac{2v}{1+u^2+v^2} & 0 \\ -v & -u & 2w \end{pmatrix} \quad \text{für } (u,v,w) \in \mathbb{R}^3.$$

Zur Berechnung der Ableitung von $g \circ f$ verwenden wir die Kettenregel (Satz 5.4) sowie das Additionstheorem $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$ für alle $z \in \mathbb{R}$ und erhalten

$$\begin{aligned}
(g \circ f)'(x,y) &= g'(f(x,y))f'(x,y) = g'(\sin(x-y), \cos(x-y), y\sinh(x))f'(x,y) \\
&= \begin{pmatrix} \sin(x-y) & \cos(x-y) & 0 \\ -\cos(x-y) & -\sin(x-y) & 2y\sinh(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(x-y) & -\cos(x-y) \\ -\sin(x-y) & \sin(x-y) \\ y\cosh(x) & \sinh(x) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sin^2(x-y) - \cos^2(x-y) + 2y^2\sinh(x)\cosh(x) & \cos^2(x-y) - \sin^2(x-y) + 2y\sinh^2(x) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 - 2\cos^2(x-y) + 2y^2\sinh(x)\cosh(x) & 1 - 2\sin^2(x-y) + 2y\sinh^2(x) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Beachte, dass sich f mit Hilfe der Matrixmultiplikation schreiben lässt als

$$f(x) = x \cdot (Mx) = x^\top Mx \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n.$$

Wir zeigen, dass f ist differenzierbar auf $\mathbb{R}^n$ mit Ableitung $f'(x) = (\operatorname{grad} f)(x) = (Mx)^\top + x^\top M \in \mathbb{R}^{1\times n}$ für $x \in \mathbb{R}^n$. Dazu seien $x \in \mathbb{R}^n$ und $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dann gilt zunächst

$$\begin{aligned}
f(x+h) &= (x+h) \cdot \big(M(x+h)\big) = x \cdot (Mx) + x \cdot (Mh) + h \cdot (Mx) + h \cdot (Mh) \\
&= f(x) + x^\top Mh + (Mx)^\top h + h \cdot (Mh).
\end{aligned}$$

Die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung liefert

$$\frac{1}{\|h\|}\left|f(x+h)-f(x)-\big(x^\top M+(Mx)^\top\big)h\right| = \frac{|h\cdot(Mh)|}{\|h\|} \le \|M\|\|h\| \to 0 \quad \text{für } h\to 0.$$

Das zeigt, dass f differenzierbar ist in x mit Ableitung $f'(x) = x^\top M + (Mx)^\top$.

Aufgabe 10 (K) (a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R};\quad f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xy^2z}{x^4+y^4+z^4}, & (x,y,z)\neq(0,0,0),\\ 0, & (x,y,z)=(0,0,0). \end{cases}$$

im Ursprung $(0,0,0)$. Ist f dort differenzierbar?

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R};\quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}\big(\cosh(x+9y)-1\big), & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

im Punkt $(0,0)$ differenzierbar ist.

Lösung zu Aufgabe 10 (a) Die Funktion f ist in $(0,0,0)$ partiell differenzierbar mit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0) = \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) = 0,$$

aber sie ist nicht differenzierbar in diesem Punkt.

Für den Nachweis der ersten Behauptung beachte, dass $f(\delta,0,0)=0$ für alle $\delta\in\mathbb{R}$. Es folgt, dass f in $(0,0,0)$ partiell nach x differenzierbar ist, denn

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) = \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{|\delta|}|f(\delta,0,0)-f(0,0,0)| = \lim_{\delta\to 0} 0 = 0.$$

Analog erhalten wir wegen $f(0,\delta,0)=f(0,0,\delta)=0$ für alle $\delta\in\mathbb{R}$ auch $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0) = \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) = 0$.
Die Funktion f ist nicht stetig in $(0,0,0)$ und somit auch nicht differenzierbar. Um das einzusehen, betrachten wir $f(t,t,t) = \frac{t^4}{3t^4}$ für $t>0$. Dann haben wir

$$\lim_{t\to 0^+} f(t,t,t) = \lim_{t\to 0^+}\frac{t^4}{3t^4} = \frac{1}{3} \neq f(0,0,0).$$

(b) Die Differenzierbarkeit von f in $(0,0)$ weisen wir direkt über die Definition nach. Wir bestimmen zuerst den Gradienten $(\operatorname{grad} f)(0,0)$ als Kandidaten für die Ableitung $f'(0,0)$. Dazu berechnen wir die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. Da für $h\neq 0$ sowohl $f(h,0)=0$ als auch $f(0,h)=0$ sehen wir sofort, dass

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Es ist also $(\operatorname{grad}(f))(0,0) = (0\ \ 0)$. Sei jetzt $(h_1,h_2)\neq(0,0)$. Dann haben wir

$$\begin{aligned}\rho(h_1,h_2) := \frac{1}{\|(h_1,h_2)\|}\left|f(h_1,h_2)-f(0,0)-(0\ \ 0)\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}\right| &= \left|\frac{2h_1h_2}{h_1^2+h_2^2}\,\frac{\cosh(h_1+9h_2)-1}{\|(h_1,h_2)\|}\right|\\ &= \left|\frac{2h_1h_2}{h_1^2+h_2^2}\right|\frac{|\cosh(h_1+9h_2)-1|}{\|(h_1,h_2)\|}.\end{aligned}$$

Auf der einen Seite gilt $0\le(|h_1|-|h_2|)^2 = h_1^2-2|h_1||h_2|+h_2^2$ und damit

$$\left|\frac{2h_1h_2}{h_1^2+h_2^2}\right| = \frac{2|h_1||h_2|}{h_1^2+h_2^2} \le 1.$$

Auf der andern Seite ist die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $g(x, y) = \cosh(x + 9y)$ stetig partiell differenzierbar als Komposition der stetig (partiell) differenzierbaren Funktion $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $h(x, y) = x + 9y$. Es ist $h'(x, y) = (1 \;\; 9)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Die Kettenregel liefert die Ableitung $g'(0, 0) = \cosh'(h(0, 0))h'(0, 0) = \sinh(0)(1 \;\; 9) = (0 \;\; 0)$. Somit konvergiert der Faktor

$$\frac{|\cosh(h_1 + 9h_2) - 1|}{\|(h_1, h_2)\|} = \frac{1}{\|(h_1, h_2)\|} \left| g(h_1, h_2) - g(0, 0) - g'(0, 0) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \right|$$

gegen Null für $(h_1, h_2) \to 0$. Das zeigt, dass $\rho(h_1, h_2) \to 0$ für $(h_1, h_2) \to 0$ und damit, dass f differenzierbar ist im Punkt $(0, 0)$.

Aufgabe 11 (a) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $u : (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch $u(t, x) := (2\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right)$. Zeigen Sie, dass u zweimal stetig partiell differenzierbar ist und die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(t, x)$$

erfüllt für alle $(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n$.

(b) Es seien $I_1, I_2 \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle und $D := I_1 \times I_2$ sowie $f : D \to \mathbb{R}$ auf D partiell differenzierbar. Zusätzlich seien die partiellen Ableitungen $f_x, f_y : D \to \mathbb{R}$ beschränkt. Zeigen Sie, dass f stetig ist auf D.

Lösung zu Aufgabe 11 (a) Es sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $j \in \{1, \ldots, n\}$ beliebig. Wir schreiben $x = (x_1, \ldots x_n)$. Die Abbildung

$$\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; \quad w \mapsto \|(x_1, \ldots x_{j-1}, w, x_{j+1}, \ldots x_n)\|^2 = x_1^2 + \ldots + x_{j-1}^2 + w^2 + x_{j+1}^2 + \ldots + x_n^2$$

ist beliebig oft differenzierbar. Auch die Funktion $(0, \infty) \to \mathbb{R}$; $t \mapsto \frac{\|x\|^2}{t}$ ist differenzierbar. Für alle $(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ gilt nach der Produktregel

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) &= \left(-\tfrac{n}{2}(2\pi t)^{-\frac{n}{2}-1} 2\pi + (2\pi t)^{-\frac{n}{2}} \tfrac{\|x\|^2}{4t^2}\right) \exp\left(-\tfrac{\|x\|^2}{4t}\right) \\ &= (2\pi t)^{-\frac{n}{2}-1} \pi \left(-n + \tfrac{\|x\|^2}{2t}\right) \exp\left(-\tfrac{\|x\|^2}{4t}\right). \end{aligned}$$

Auf der anderen Seite haben wir

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(t, x) = (2\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\tfrac{\|x\|^2}{4t}\right) \left(-\tfrac{2x_j}{4t}\right)$$

und somit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(t, x) = (2\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\tfrac{\|x\|^2}{4t}\right) \left(-\tfrac{1}{2t} + \tfrac{x_j^2}{4t^2}\right)$$

Summieren wir dies für j von 1 bis n, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} (2\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\tfrac{\|x\|^2}{4t}\right) \left(-\tfrac{1}{2t} + \tfrac{x_j^2}{4t^2}\right) &= (2\pi t)^{-\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\tfrac{\|x\|^2}{4t}\right) (2\pi t) \sum_{j=1}^{n} \left(-\tfrac{1}{2t} + \tfrac{x_j^2}{4t^2}\right) \\ &= (2\pi t)^{-\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\tfrac{\|x\|^2}{4t}\right) (2\pi t) \left(\tfrac{1}{2t} \tfrac{\|x\|^2}{2t} - \frac{n}{2t}\right) \\ &= (2\pi t)^{-\frac{n}{2}-1} \pi \left(\tfrac{\|x\|^2}{2t} - n\right) \exp\left(-\tfrac{\|x\|^2}{4t}\right), \end{aligned}$$

wie behauptet.

(b) Sei $(x_0, y_0) \in D$ beliebig. Für alle $(x_0, y_0), (x, y) \in D$ gilt die Abschätzung

$$|f(x_0, y_0) - f(x, y)| \leq |f(x_0, y_0) - f(x_0, y)| + |f(x_0, y) - f(x, y)|$$

Da die Funktion $f(x_0, \boldsymbol{.}) : I_2 \to \mathbb{R}$; $y \mapsto f(x_0, y)$ stetig differenzierbar ist, liefert Mittelwertsatz aus Analysis 1 ein ξ zwischen y_0 und y mit $f(x_0, y_0) - f(x_0, y) = f_y(x_0, \xi)(y_0 - y)$. Genauso finden wir für jedes $y \in I_2$ und alle $x \in I_1$ ein $\xi_{(x,y)}$ zwischen x_0 und x mit $f(x_0, y) - f(x, y) = f_x(\xi_{(x,y)})(x_0 - x)$. Außerdem existieren nach Voraussetzung

$$C_1 := \sup_{(u,v)\in D} |f_x(u,v)| \geq |f_x(\xi_{(x,y)})| \qquad \text{und} \qquad C_2 := \sup_{(u,v)\in D} |f_y(u,v)| \geq |f_y(x_0,\xi)|.$$

Wir setzen $C := C_1 + C_2$ und erhalten

$$\begin{aligned} |f(x_0,y_0) - f(x,y)| &\leq |f(x_0,y_0) - f(x_0,y)| + |f(x_0,y) - f(x,y)| \\ &= |f_y(x_0,\xi)||y_0 - y| + |f_x(\xi_{(x,y)}, y_0)||x_0 - x| \\ &\leq C_2|y_0 - y| + C_1|x_0 - x| \leq C(|y_0 - y| + |x_0 - x|) \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$ und $\delta := \frac{\varepsilon}{2C}$. Für alle $(x, y) \in U_\delta(x_0, y_0)$ gilt $|x_0 - x| < \delta$ und $|y_0 - y| < \delta$, sodass

$$|f(x_0,y_0) - f(x,y)| \leq C(|y_0 - y| + |x_0 - x|) < 2C\delta = \varepsilon.$$

Also ist f stetig in (x_0, y_0).

Aufgabe 12 Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Man nennt f homogen vom Grad $\alpha \in \mathbb{R}$, wenn

$$\forall t > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \ : \ f(tx) = t^\alpha f(x).$$

(a) Nehmen Sie an, die Funktion f sei differenzierbar auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $t > 0$ gelten

$$f'(x) \cdot x = \alpha f(x) \qquad \text{und} \qquad f'(tx) = t^{\alpha-1} f'(x).$$

(b) Es sei $\alpha = 1$ und f differenzierbar in 0. Zeigen Sie, dass die Funktion f linear ist.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst $f(0) = 0$.

Lösung zu Aufgabe 12 (a) Sei f differenzierbar auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Für festes $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt nach der Kettenregel

$$f'(tx) \cdot x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[f(tx)\big] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[t^\alpha f(x)\big] = \alpha t^{\alpha-1} f(x) \quad \text{für alle } t > 0.$$

Setzen wir $t = 1$ ein, dann erhalten wir die erste Behauptung.

Sei nun $t > 0$ fest. Wir betrachten $g_t : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch $g(x) = f(tx) = t^\alpha f(x)$. Dann ist g die Hintereinanderausführung von f und der Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$; $x \mapsto tx$. Auch hier ist die Kettenregel anwendbar und liefert

$$f'(tx) \cdot (t \,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) = g_t'(x) = t^\alpha f'(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Es folgt auch die zweite Behauptung.

(b) Wie im Hinweis angegeben zeigen wir zunächst, dass $f(0) = 0$. Sei dazu $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ fest. Da $f\big(\frac{1}{k}x_0\big) = \frac{1}{k} f(x_0)$ und da f in 0 differenzierbar und somit insbesondere stetig ist, folgt

$$f(0) = \lim_{k\to\infty} f\big(\tfrac{1}{k}x_0\big) = \lim_{k\to\infty} \tfrac{1}{k} f(x_0) = 0.$$

Wir zeigen nun, dass $f(x) = f'(0) \cdot x$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, woraus offensichtlich folgt, dass f linear ist. Sei also $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Weil f in 0 differenzierbar ist gilt

$$r_x(t) := \frac{1}{\|tx\|}\big(f(tx) - f(0) - f'(0) \cdot (tx)\big) \to 0 \quad \text{für } t \to 0^+.$$

Da f homogen vom Grad 1 ist, haben wir andererseits

$$r_x(t) = \frac{1}{\|tx\|}\big(f(tx) - f(0) - f'(0) \cdot (tx)\big) = \frac{1}{t\|x\|} t\big(f(x) - f'(0) \cdot x\big) = \frac{1}{\|x\|}\big(f(x) - f'(0) \cdot x\big)$$

unabhängig von $t > 0$. Somit muss $r_x(t) = 0$ sein für alle $t > 0$ und das bedeutet $f(x) = f'(0) \cdot x$.