KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE 01.06.2017
Fakultät für Mathematik
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Lars Machinek

Lösungsvorschlag zum 4. Übungsblatt

Analysis II im SS17

Aufgabe 13 (a) Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $D \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleer und offen sowie $f : D \to \mathbb{R}^m$ partiell differenzierbar auf D und außerdem Lipschitzstetig. Zeigen Sie, dass die Jacobimatrix J_f auf D beschränkt ist, das heißt es existiert ein $C \geq 0$ mit $\|J_f(x)\| \leq C$ für alle $x \in D$.

(b) Sei $D = (0,2)^2 \setminus [0,1]^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ und sei $g : D \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar. Beweisen Sie: Wenn es ein $M > 0$ gibt mit $\|\operatorname{grad} g(x)\| \leq M$ für alle $x \in D$ dann gilt die Abschätzung

$$\|g(x) - g(y)\| \leq \sqrt{2}M\|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in D.$$

Lösung zu Aufgabe 13 (a) Da f Lipschitzstetig ist, gibt es ein $L \geq 0$ mit $\|f(x)-f(y)\| \leq L\|x-y\|$ für alle $x, y \in D$. Sei $j \in \{1, \ldots, n\}$. Wir zeigen zuerst, dass jede der partiellen Ableitungen von $f_j : D \to \mathbb{R}$ beschränkt ist. Hierzu beachte, dass $f_j(x)-f_j(y)$ eine Komponente des Vektors $f(x)-f(y)$ ist und damit

$$|f_j(x) - f_j(y)| \leq \|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in D.$$

Für $\xi \in D$ und jedes $k \in \{1, ..., m\}$ gilt also

$$\begin{aligned} |\partial_k f_j(\xi)| &= \left| \lim_{\delta \to 0} \frac{f_j(\xi + \delta e_k) - f_j(\xi)}{\delta} \right| = \lim_{\delta \to 0} \frac{|f_j(\xi + \delta e_k) - f_j(\xi)|}{|\delta|} \\ &\leq \lim_{\delta \to 0} \frac{\|f(\xi + \delta e_k) - f(\xi)\|}{|\delta|} \leq \lim_{\delta \to 0} \frac{L\|\xi + \delta e_k - \xi\|}{|\delta|} = L \lim_{\delta \to 0} \frac{|\delta|}{|\delta|}, \end{aligned}$$

wobei e_k der k-te Einheitsvektor sei. Nun folgt die Abschätzung

$$\|(J_f)(\xi)\| = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \big((\partial_k f_j)(\xi) \big)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} L^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{mn}L.$$

Das heißt, man kann $C = \sqrt{mn}L$ wählen.

(b) Setze $D_1 := (1,2) \times (0,2)$ und $D_2 := (0,2) \times (1,2)$. Es ist leicht zu sehen, dass $D = D_1 \cup D_2$. Die Mengen D_1 und D_2 sind offenbar konvex.
Seien $x, y \in D$. Liegen x und y beide in D_1 oder beide in D_2, gibt es nach dem Mittelwertsatz einen Punkt $\xi \in S[x, y]$ mit

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &= |\operatorname{grad} g(\xi) \cdot (x - y)| \leq \|\operatorname{grad} g(\xi)\| \|x - y\| \leq M\|x - y\| \\ &\leq \sqrt{2}M\|x - y\|. \end{aligned}$$

Sei nun $x \in D_1 \setminus D_2$ und $y \in D_2 \setminus D_1$. Wir schreiben $x = (x_1, x_2)$ und $y = (y_1, y_2)$. Weil x in D_1 liegt haben wir $x_1 \in (1,2)$. Analog folgt $y_2 \in (1,2)$ aus $y \in D_2$.
Wir setzen $p := (x_1, y_2)$. Dann ist $p \in D_1 \cap D_2 = (1,2) \times (1,2)$. Wegen $x, p \in D_1$ folgern wir mit dem Mittelwertsatz wie oben, dass

$$|g(x) - g(p)| \leq M\|x - p\|,$$

und mit $y, p \in D_2$ genauso

$$|g(y) - g(p)| \leq M\|y - p\|.$$

Die Dreiecksungleichung liefert

$$|g(x) - g(y)| \leq |g(x) - g(p)| + |g(p) - g(y)| \leq M\|x - p\| + M\|p - y\| = M(\|x - p\| + \|y - p\|).$$

Wir setzen $a := \|x - p\|, b := \|y - p\|$ und $c := \|x - y\|$. Dann sind $a, b, c \geq 0$ und es reicht zu zeigen, dass $a + b \leq \sqrt{2}c$ oder äquivalent $(a + b)^2 \leq 2c^2$. Tatsächlich haben wir

$$(x - p) \cdot (p - y) = (0, x_2 - y_2) \cdot (x_1 - y_1, 0) = 0,$$

sodass $x - p$ und $p - y$ orthogonal zueinander sind. Nach dem Satz von Pythagoras (Aufgabe 3 (a) auf Blatt 1) folgt

$$a^2 + b^2 = \|x - p\|^2 + \|p - y\|^2 = \|(x - p) + (p - y)\|^2 = \|x - y\|^2 = c^2,$$

also gilt auch

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 2a^2 + 2b^2 - (a^2 - 2ab + b^2) = 2c^2 - (a - b)^2 \leq 2c^2,$$

was zu zeigen war.

Den Fall $y \in D_1 \setminus D_2$ und $x \in D_2 \setminus D_1$ behandelt man ganz analog.

Aufgabe 14 (K) (a) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y, z) := x^3y + x^2y^2z^2 - 6x + 3z$. Zeigen Sie, dass die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}(1, -1, 1)$ für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ mit $\|v\| = 1$ existiert und berechnen Sie diese.

(b) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x, y) := \begin{cases} \sqrt{\|(x, y)\| + 1}, & (x, y) \in Q, \\ \cos(\|(x, y)\|), & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus Q, \end{cases}$$

wobei $Q := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ und } y > 0\}$. Für welche Richtungsvektoren $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ existiert die Richtungsableitung $\frac{\partial g}{\partial v}(0, 0)$?

Lösung zu Aufgabe 14 (a) Als Komposition stetig partiell differenzierbarer Funktionen ist f stetig partiell differenzierbar. Die partiellen Ableitungen sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x, y, z) &= 3x^2y + 2xy^2z^2 - 6, \\ \partial_2 f(x, y, z) &= x^3 + 2x^2yz^2, \\ \partial_3 f(x, y, z) &= 2x^2y^2z + 3. \end{aligned}$$

Also ist $\operatorname{grad} f(1, -1, 1) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(1, -1, 1) & \partial_2 f(1, -1, 1) & \partial_3 f(1, -1, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ und Satz 6.4 (2) der Vorlesung liefert

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1, -1, 1) = \operatorname{grad} f(1, -1, 1) \cdot v = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = -7v_1 - v_2 + 5v_3.$$

für $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ mit $\|v\| = 1$ beliebig.

(b) Wir behaupten, dass die Richtungsableitung genau für $v \in \mathbb{R}^2 \setminus (Q \cup (-Q))$ (mit $\|v\| = 1$) existiert. Hierbei ist $-Q := \{-v \mid v \in Q\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0 \text{ und } y < 0\}$.

Sei zunächst $v \in Q$ mit $\|v\| = 1$. Offensichtlich ist $tv \in Q$ für alle $t > 0$ und $tv \notin Q$ für $t < 0$. Wir betrachten die reelle Funktion $\varphi_v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \varphi_v(t) = g((0, 0) + tv) = g(tv)$ und ihren Differenzenquotienten im Punkt $t = 0$, also

$$\frac{1}{\delta}(\varphi_v(\delta) - \varphi_v(0)) \quad \text{für } \delta \neq 0.$$

Ist $\delta > 0$, dann haben wir

$$\begin{aligned}\frac{1}{\delta}(\varphi_v(\delta) - \varphi_v(0)) &= \frac{1}{\delta}(\sqrt{\|\delta v\| + 1} - 1) = \frac{1}{\delta}(\sqrt{\delta\|v\| + 1} - \sqrt{1}) \\ &= \frac{1}{\delta}(\sqrt{\delta + 1} - \sqrt{1}) \to \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\big[\sqrt{s}\big]\big|_{s=1} = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}, \quad \text{für } \delta \to 0^+.\end{aligned}$$

Wenn hingegen $\delta < 0$ ist, dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{\delta}(\varphi_v(\delta) - \varphi_v(0)) &= \frac{1}{\delta}(\cos(\|\delta v\|) - 1) = \frac{1}{\delta}(\cos(|\delta|) - \cos(0)) = (-1)\frac{1}{-\delta}(\cos(-\delta) - \cos(0)) \\ &\to (-1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\big[\cos(s)\big]\big|_{s=0} = \sin(0) = 0, \quad \text{für } \delta \to 0^-.\end{aligned}$$

Das zeigt, dass der Grenzwert $\lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\delta}(\varphi_v(\delta) - \varphi_v(0))$ nicht existiert was gleichbedeutend damit ist, dass die Richtungsableitung $\frac{\partial g}{\partial v}(0)$ nicht existiert.

Sei $v \in -Q$ mit $\|v\| = 1$. Dann ist $-v \in Q$. Somit existiert die Richtungsableitung $\frac{\partial g}{\partial v}(0)$ nicht, da sonst nach Satz 6.4 (1) auch die Richtungsableitung $\frac{\partial g}{\partial(-v)}(0)$ existieren würde.

Sei schließlich $v \in \mathbb{R}^2 \setminus (Q \cup (-Q))$ mit $\|v\| = 1$. Dann ist $tv \notin Q$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Wie oben betrachten wir den Differenzenquotienten der Funktion $\varphi_v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $\varphi_v(t) = g(tv)$. Es gilt

$$\frac{1}{\delta}(\varphi_v(\delta) - \varphi_v(0)) = \frac{1}{\delta}(\cos(|\delta|) - \cos(0)).$$

Auf der rechten Seite steht „fast“ der Differenzenquotient der Funktion cos im Punkt 0. Um den Betrag aufzulösen, betrachten wir wieder den linksseitigen und den rechtsseitigen Grenzwert getrennt. Es gelten

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to 0^-} \frac{1}{\delta}(\varphi_v(\delta) - \varphi_v(0)) &= \lim_{\delta\to 0^-} \frac{1}{\delta}(\cos(-\delta) - \cos(0)) = \lim_{\delta\to 0^-} \frac{-1}{-\delta}(\cos(-\delta) - \cos(0)) \\ &= -\lim_{\mu\to 0^+} \frac{1}{\mu}(\cos(\mu) - \cos(0)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\big[\cos(s)\big]|_{s=0} = -\sin(0) = 0.\end{aligned}$$

und

$$\lim_{\delta\to 0^+} \frac{1}{\delta}(\varphi_v(\delta) - \varphi_v(0)) = \lim_{\delta\to 0^+} \frac{1}{\delta}(\cos(\delta) - \cos(0)) = -\sin(0) = 0.$$

Da der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert gleich sind, existiert die Richtungsableitung $\frac{\partial g}{\partial v}(0)$ und hat den Wert 0.

Aufgabe 15 (K) Sei $f \in C^k(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Für $k \in \mathbb{N}_0$ und $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ definieren wir das k-te Taylorpolynom von f im Entwicklungspunkt (x_0, y_0) durch

$$(T_k f)((x, y); (x_0, y_0)) := \sum_{j=0}^{k} \frac{((x - x_0, y - y_0) \cdot \nabla)^j f(x_0, y_0)}{j!}.$$

(a) Bestimmen Sie die 2. Taylorpolynome $(T_2 f)((x, y); (\log \pi, 0))$ und $(T_2 f)((x, y); (0, 0))$ von

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad f(x, y) = y\mathrm{e}^{x+y} - x.$$

(b) Bestimmen Sie das 3. Taylorpolynom $(T_3 g)((x, y); (0, 0))$ von

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad g(x, y) = \sin(x\mathrm{e}^y).$$

Lösung zu Aufgabe 15 (a) Die Funktion f ist beliebig oft stetig partiell differenzierbar. Wir berechnen die partiellen Ableitungen bis zur 2. Ordnung. Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gelten

$$\partial_1 f(x, y) = y\mathrm{e}^{x+y} - 1, \qquad \partial_2 f(x, y) = \mathrm{e}^{x+y} + y\mathrm{e}^{x+y} = (1 + y)\mathrm{e}^{x+y}$$

und weiter

$$\partial_1\partial_1 f(x,y) = y\mathrm{e}^{x+y}, \qquad \partial_1\partial_2 f(x,y) = (1+y)\mathrm{e}^{x+y}, \qquad \partial_2\partial_2 f(x,y) = (2+y)\mathrm{e}^{x+y}.$$

Setzen wir den Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) := (\log\pi, 0)$ ein, so erhalten wir $f(\log\pi, 0) = -\log\pi$ und

$$\begin{aligned} \partial_1 f(\log\pi,0) &= -1 & \partial_2 f(\log\pi,0) &= \partial_1\partial_2 f(\log\pi,0) = \pi \\ \partial_1\partial_1 f(\log\pi,0) &= 0 & \partial_2\partial_2 f(\log\pi,0) &= 2\pi. \end{aligned}$$

Die Definition des Taylorpolynoms liefert

$$\begin{aligned} (T_2 f)((x,y);(\log\pi,0)) &= f(\log\pi,0) + (x-x_0)\partial_1 f(\log\pi,0) + (y-0)\partial_2 f(\log\pi,0) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}(x-x_0)^2\partial_1\partial_1 f(\log\pi,0) + \tfrac{2}{2}(x-x_0)y\partial_1\partial_2 f(\log\pi,0) + \tfrac{1}{2}y^2\partial_2\partial_2 f(\log\pi,0) \\ &= -\log\pi - (x-x_0) + \pi y + \pi(x-x_0)y + \pi y^2. \end{aligned}$$

Wir könnten auf die gleiche Weise das Taylorpolynom für den Entwicklungspunkt $(0,0)$ aufstellen. Stattdessen verwenden wir den folgenden Trick. Wir kennen die Potenzreihenentwicklung

$$\mathrm{e}^t = \exp(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j$$

der Exponentialfunktion. Auf Grund der absoluten Konvergenz dieser Reihe folgt

$$f(x,y) = y\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{j!}(x+y)^j\Big) - x = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{j}\Big(\frac{1}{l!(j-l)!}x^{j-l}y^{l+1}\Big) - x$$

Partielles Ableiten dieser Potenzreihe und einsetzen des Entwicklungspunkts $(0,0)$ liefert die Koeffizienten des Taylorpolynoms. Da der Entwicklungspunkt der Potenzreihe mit dem des Taylorpolynoms übereinstimmt können wir praktisch die Reihenentwicklung nach dem Polynomgrad 2 abbrechen. Das heißt

$$\begin{aligned} (T_2 f)((x,y);(0,0)) &= \sum_{j=0}^{1}\sum_{l=0}^{j}\Big(\frac{1}{l!(j-l)!}x^{j-l}y^{l+1}\Big) - x \\ &= y - x + xy + y^2. \end{aligned}$$

(b) Wie oben berechnen wir die partiellen Ableitungen von g diesmal bis zur 3. Ordnung. Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gelten

$$\partial_1 g(x,y) = \mathrm{e}^y\cos(x\mathrm{e}^y), \qquad \partial_2 g(x,y) = x\mathrm{e}^y\cos(x\mathrm{e}^y)$$

und

$$\begin{aligned} &\partial_1\partial_1 g(x,y) = -\mathrm{e}^{2y}\sin(x\mathrm{e}^y), && \partial_1\partial_2 g(x,y) = \mathrm{e}^y\cos(x\mathrm{e}^y) - x\mathrm{e}^{2y}\sin(x\mathrm{e}^y), \\ &\partial_2\partial_2 g(x,y) = x\mathrm{e}^y\cos(x\mathrm{e}^y) - x^2\mathrm{e}^{2y}\sin(x\mathrm{e}^y) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} &\partial_1\partial_1\partial_1 g(x,y) = -\mathrm{e}^{3y}\cos(x\mathrm{e}^y), \qquad \partial_1\partial_1\partial_2 g(x,y) = -2\mathrm{e}^{2y}\sin(x\mathrm{e}^y) - x\mathrm{e}^{3y}\cos(x\mathrm{e}^y), \\ &\partial_1\partial_2\partial_2 g(x,y) = \mathrm{e}^y\cos(x\mathrm{e}^y) - x\mathrm{e}^{2y}\sin(x\mathrm{e}^y) - 2x\mathrm{e}^{2y}\sin(x\mathrm{e}^y) - x^2\mathrm{e}^{3y}\cos(x\mathrm{e}^y) \\ &\partial_2\partial_2\partial_2 g(x,y) = x\mathrm{e}^y\cos(x\mathrm{e}^y) - x^2\mathrm{e}^{2y}\sin(x\mathrm{e}^y) - 2x^2\mathrm{e}^{2y}\sin(x\mathrm{e}^y) - x^3\mathrm{e}^{3y}\cos(x\mathrm{e}^y). \end{aligned}$$

Einsetzen des Entwicklungspunkts $(0,0)$ liefert

$$\begin{aligned} g(0,0) = \partial_2 g(0,0) = \partial_1\partial_1 g(0,0) = \partial_2\partial_2 g(0,0) = \partial_1\partial_1\partial_2 g(0,0) = \partial_2\partial_2\partial_2 g(0,0) = 0, \\ \partial_1 g(0,0) = \partial_1\partial_2 g(0,0) = \partial_1\partial_2\partial_2 g(0,0) = 1 \\ \partial_1\partial_1\partial_1 g(0,0) = -1. \end{aligned}$$

Wir erhalten das Taylorpolynom

$$\begin{aligned}(T_3 g)((x,y);(0,0)) &= x\partial_1 g(0,0) + \tfrac{2}{2}xy\partial_1\partial_2 g(0,0) + \tfrac{1}{6}x^3\partial_1\partial_1\partial_1 g(0,0) + \tfrac{3}{6}xy^2\partial_1\partial_2\partial_2 g(0,0)\\ &= x + xy - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{2}xy^2.\end{aligned}$$

Aufgabe 16 (a) Es seien $k, m, n \in \mathbb{N}$ sowie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $E \subseteq \mathbb{R}^k$ beide offen und nichtleer. Weiter seien $g : D \to \mathbb{R}^m$ und $h : E \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar auf ihren Definitionsbereichen. Zeigen Sie, dass

$$F : D \times E \to \mathbb{R}; \quad F(x,y) := g(x) \cdot h(y)$$

differenzierbar ist und drücken Sie die Ableitung von F durch die Ableitungen von g und h aus.

(b) Sei $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\Phi(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\sin(\theta)\\ r\sin(\varphi)\sin(\theta)\\ r\cos(\theta)\end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie Φ'. Für welche $(r,\varphi,\theta) \in \mathbb{R}^3$ ist die Jacobimatrix $\Phi'(r,\varphi,\theta)$ invertierbar?

Lösung zu Aufgabe 16 (a) Wir definieren $G : D \times E \to \mathbb{R}^{2m}$ durch $G(x,y) := (g(x), h(y))$. Dann ist G differenzierbar, da g und h differenzierbar sind. Für $(x,y) \in D \times E$ gilt weiter

$$\begin{aligned}G'(x,y) = J_G(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x) & \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(x) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_k}(x)\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(x) & \frac{\partial g_m}{\partial y_1}(x) & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial y_k}(x)\\ \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(y) & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n}(y) & \frac{\partial h_1}{\partial y_1}(y) & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial y_k}(y)\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial h_m}{\partial x_1}(y) & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial x_n}(y) & \frac{\partial h_m}{\partial y_1}(y) & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial y_k}(y)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} \partial_1 g_1(x) & \dots & \partial_n g_1(x) & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \partial_1 g_m(x) & \dots & \partial_n g_m(x) & 0 & \dots & 0\\ 0 & \dots & 0 & \partial_1 h_1(y) & \dots & \partial_k h_1(y)\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & \partial_1 h_m(y) & \dots & \partial_k h_m(y)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} J_g(x) & 0_{m\times n}\\ 0_{m\times k} & J_h(y)\end{pmatrix},\end{aligned}$$

wobei wir hier mit $0_{m\times n}$ die Nullmatrix aus $\mathbb{R}^{m\times n}$ bezeichnen und entsprechende $0_{m\times k}$ die Nullmatrix aus $\mathbb{R}^{m\times k}$. Wir definieren $f : \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}$; $f(u,v) = u \cdot v$. Offenbar ist f stetig partiell differenzierbar und es ist leicht zu sehen, dass $f'(u_0, v_0)$ gegeben ist durch

$$f'(u_0,v_0) = \begin{pmatrix} v_0^\top & u_0^\top \end{pmatrix} \quad \text{für } (u_0,v_0) \in \mathbb{R}^{2m}.$$

Die Kettenregel liefert, dass $F = f \circ G$ differenzierbar ist auf $D \times E$ und dass für jedes $(x,y) \in D \times E$ gilt

$$\begin{aligned}F'(x,y) = (f\circ G)'(x,y) = f'(G(x,y))G'(x,y) &= f'(g(x),h(y)) \begin{pmatrix} J_g(x) & 0_{m\times n}\\ 0_{m\times k} & J_h(y)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} h(y)^\top & g(x)^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_g(x) & 0_{m\times n}\\ 0_{m\times k} & J_h(y)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(y)^\top J_g(x) & g(x)^\top J_h(y)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Bemerkung: Wir sehen, dass wir $f : \mathbb{R}^{m+m} \to \mathbb{R}$ durch eine andere differenzierbare Funktion ersetzen könnten, wie zum Beispiel die durch $f(u,v) = u \cdot (Mv)$ gegebene Abbildung.

(b) Alle Komponentenfunktionen von Φ sind stetig partiell differenzierbar und somit ist Φ stetig partiell differenzierbar. Wir berechnen

$$\Phi'(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\sin(\theta) & -r\sin(\varphi)\sin(\theta) & r\cos(\varphi)\cos(\theta) \\ \sin(\varphi)\sin(\theta) & r\cos(\varphi)\sin(\theta) & r\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ \cos(\theta) & 0 & -r\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

für alle $(r,\varphi,\theta) \in \mathbb{R}^2$. Außerdem berechnen wir mit dem Determinantenentwicklungssatz

$$\begin{aligned} \det(\Phi'(r,\varphi,\theta)) &= \det \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\sin(\theta) & -r\sin(\varphi)\sin(\theta) & r\cos(\varphi)\cos(\theta) \\ \sin(\varphi)\sin(\theta) & r\cos(\varphi)\sin(\theta) & r\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ \cos(\theta) & 0 & -r\sin(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \cos(\theta)\left(-r^2\sin^2(\varphi)\sin(\theta)\cos(\theta) - r^2\cos^2(\varphi)\sin(\theta)\cos(\theta)\right) \\ &\quad - r\sin(\theta)\left(r\cos^2(\varphi)\sin^2(\theta) + r\sin^2(\varphi)\sin^2(\theta)\right) \\ &= -r^2\cos^2(\theta)\sin(\theta) - r^2\sin^3(\theta) \\ &= -r^2\sin(\theta). \end{aligned}$$

Da $\Phi'(r,\varphi,\theta)$ genau dann invertierbar ist, wenn diese Determinante ungleich Null ist, folgt, dass $\Phi'(r,\varphi,\theta)$ genau dann invertierbar ist, wenn $r \neq 0$ und $\theta \notin \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi,\ k \in \mathbb{N}\}$.

Information

Die Anmeldung zum Analysis II Übungsschein ist ab sofort für alle Studierenden freigeschaltet.

Der **Anmeldezeitraum** endet am **28.07.2017**.

Die Termine für die nächsten Klausuren zu Analysis I und Analysis II sind

Analysis I : 28.09.2017, 8 – 10 Uhr,
Analysis II : 28.09.2017, 11 – 13 Uhr.