KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE 08.06.2017
Fakultät für Mathematik
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Lars Machinek

Lösungsvorschlag zum 5. Übungsblatt

Analysis II im SS17

Aufgabe 17 (a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\ f(x, y) \mapsto y^2 - 3x^2y + x^4$. Zeigen Sie, dass für jede Richtung $v \in \mathbb{R}^2$ die Funktion

$$\varphi_v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad \varphi_v(t) = f(tv)$$

ein lokales Minimum in $t = 0$ besitzt. (Somit besitzt die Einschränkung von f auf jede Gerade durch den Punkt $(0, 0)$ ein lokales Minimum.) Weisen Sie auch nach, dass f in $(0, 0)$ kein lokales Minimum besitzt. *Hinweis: Betrachten Sie die Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $y = x^2$.*

(b) Es seien $m \in \mathbb{N}$ und $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ sowie

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; \quad g(x) = \sum_{k=1}^{m} \|x - a_k\|^2.$$

Zeigen Sie, dass g ein striktes globales Minimum besitzt, d.h. es gibt ein $a_* \in \mathbb{R}^n$ mit $g(a_*) < g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{a_*\}$.

Lösung zu Aufgabe 17 (a) Es sei $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $\|v\| = 1$, dann gilt

$$\varphi_v(t) = f(tv) = (tv_2)^2 - 3(tv_1)^2 tv_2 + (tv_1)^4 = v_1^4 t^4 - 3v_1^2 v_2 t^3 + v_2^2 t^2 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Im Fall $v_2 = 0$ ist mit $v_1 = 1$ und damit $\varphi_v(t) = t^4$. Also hat φ_v ein lokales Minimum in $t = 0$. Falls hingegen $v_2 \neq 0$, so gelten

$$\varphi_v'(t) = 4v_1^4 t^3 - 9v_1^2 v_2 t^2 + 2v_2^2 t \qquad \text{und} \qquad \varphi_v''(t) = 12v_1^4 t^2 - 18v_1^2 v_2 t + 2v_2^2$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Wir sehen, dass $\varphi_v'(0) = 0$ und $\varphi_v''(0) = 2v_2^2 > 0$. Wieder hat φ_v ein lokales Minimum in $t = 0$.
Jetzt zeigen wir die zweite Behauptung. Da $f(0, 0) = 0$, reicht es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $v \in \overline{U}_\varepsilon((0, 0))$ mit $f(v) < 0$ anzugeben. Sei also $\varepsilon > 0$. Für $x := \min\{1, \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{2}\}$ setzen wir $y := x^2$ und betrachten $v := (x, y)$. Da $x \leq 1$ gilt auch $x^2 \leq 1$ und damit $y^2 = x^4 \leq x^2$. Wir erhalten

$$\|v\| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{2x^2} = \sqrt{2}\tfrac{\varepsilon}{2}\sqrt{2} = \varepsilon.$$

Das bedeutet, dass $v \in \overline{U}_\varepsilon((0, 0))$. Außerdem gilt

$$f(v) = f(x, x^2) = (x^2)^2 - 3x^2x^2 + x^4 = -x^4 < 0.$$

(b) Wir zeigen, dass die Funktion g ein striktes globales Minimum im Punkt

$$a_* := \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} a_k$$

besitzt. Wir wissen, dass die Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R};\ w \mapsto \|w\|^2$ differenzierbar ist und ihre Abbildung im Punkt w gegeben ist durch $2w$. Nach der Kettenregel ist g differenzierbar und für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$g'(x) = \sum_{k=1}^{m} 2(x - a_k) = 2mx - 2\sum_{k=1}^{m} a_k.$$

Wir schließen, dass

$$g'(x) = 0 \iff 2mx = 2\sum_{k=1}^{m} a_k \iff x = a_*.$$

Wir sehen leicht, dass g zweimal stetig partiell differenzierbar ist und die zugehörige Hessematrix durch

$$H_g(x) = 2mI,$$

gegeben ist, wobei $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix sei. Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $y \neq 0$ gilt somit

$$y^\top H_g(x)y = 2my^\top y = 2m\|y\|^2 > 0,$$

also ist $H_g(x)$ positiv definit. Nach Aufgabe 18 Teil (c) ist damit a_* eine strikte globale Minimalstelle von g.

Aufgabe 18 (K) (a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch. Zeigen Sie: Ist Q positiv (negativ) definit, dann ist die Matrix invertierbar und die Inverse Q^{-1} ist ebenfalls positiv (negativ) definit.

(b) Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleer, offen und konvex und sei $f : D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Weiter seien $x, y \in D$ mit $x \neq y$ fest gewählt. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$F : (-r, 1 + r) \to \mathbb{R}; \quad F(t) = f(x + t(y - x)),$$

zweimal stetig differenzierbar ist und bestimmen Sie die ersten beiden Ableitungen. Hierbei sei $r > 0$ derart gewählt, dass $x + t(y - x) \in D$ für alle $t \in (-r, 1 + r)$, siehe die Bemerkung unten.

(c) Seien wieder $D \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleer, offen und konvex und $f : D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Weiter gelte

$$w \cdot (H_f(x)w) \geq 0 \quad \text{für alle } x \in D \text{ und } w \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie: Besitzt f einen stationären Punkt $x_0 \in D$, dann hat f in diesem Punkt ein globales Minimum. Ist zusätzlich $H_f(x_0)$ positiv definit, dann hat f in x_0 ein globales striktes Minimum.

Lösung zu Aufgabe 18 (a) Sei Q positiv definit, der Beweis für den Fall das Q negativ definit ist geht analog. Wir zeigen, dass der Kern der Matrix Q nur aus dem Nullvektor besteht. Ist $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $Qx = 0$, dann gilt auch $0 < x \cdot (Qx) = x \cdot 0 = 0$, ein Widerspruch. Somit ist $\ker Q = \{0\}$ und folglich Q invertierbar.
Um einzusehen, dass Q^{-1} symmetrisch ist, rechnen wir nach, dass $(Q^{-1})^\top$ die Inverse von Q ist. Da Q symmetrisch ist, gilt in der Tat

$$(Q^{-1})^\top Q = (Q^{-1})^\top Q^\top = (QQ^{-1})^\top = I_n^\top = I_n,$$

wobei $I_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix sei.
Es bleibt zu beweisen, dass Q^{-1} positiv definit ist. Sei $w \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Weil Q invertierbar ist, gibt es zu w (genau) ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Qx = w$. Es folgt

$$w \cdot (Q^{-1}w) = (Qx) \cdot (Q^{-1}Qx) = (Qx) \cdot x = x \cdot (Qx) > 0.$$

(b) Seien $x, y \in D$ fest gewählt, wir schreiben $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Es ist leicht zu sehen, dass die Ableitung der Abbildung $(-r, 1 + r) \to \mathbb{R}^n$; $t \mapsto x + t(y - x)$ gegeben ist durch $y - x$ aufgefasst als eine Matrix $\mathbb{R}^{n\times 1}$. Nach der Kettenregel ist F differenzierbar auf $(-r, 1 + r)$ und es gilt

$$F'(t) = f'(x + t(y - x))(y - x) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(x + t(y - x))(y_j - x_j)$$

Die Kettenregel angewendet auf $\partial_j f : D \to \mathbb{R}$ und $t \mapsto x + t(y - x)$ für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ liefert, dass F zweimal differenzierbar ist mit

$$\begin{aligned} F''(t) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[\partial_j f(x + t(y - x))(y_j - x_j)\big] = \sum_{j=1}^{n}(y_j - x_j)\big(\operatorname{grad} \partial_j f\big)(x + t(y - x))(y - x) \\ &= \sum_{j=1}^{n}(y_j - x_j)\sum_{k=1}^{n} \partial_k\partial_j f(x + t(y - x))(y_k - x_k) = (y - x) \cdot \big(H_f(x + t(y - x))(y - x)\big). \end{aligned}$$

Beachte, da f zweimal stetig partiell differenzierbar ist, ist F'' stetig und somit F zweimal stetig differenzierbar.

(c) Sei $x_0 \in D$ ein stationärer Punkt von f, d.h. $f'(x_0) = 0$. Sei $y \in D \setminus \{x_0\}$ ein beliebiger weiterer Punkt. Wie in Teil (b) der Aufgabe betrachten wir die Funktion

$$F : (-r, 1+r) \to D; \quad F(t) = f(x_0 + t(y - x_0)).$$

Wir haben gesehen, dass $F''(t) = (y - x_0) \cdot \big(H_f(x_0 + t(y - x_0))(y - x_0)\big)$. Nach Voraussetzung ist also $F''(t) \geq 0$ für alle $t \in (-r, 1-r)$ und damit F' wachsend. Weil $F'(0) = f'(x_0)(y - x_0) = 0$ gilt, ist $F'(t) \geq 0$ für $t \in [0, 1+r)$. Wir schließen, dass F auf $[0, 1+r)$ wächst. Insbesondere gilt

$$f(x_0) = F(0) \leq F(1) = f(y).$$

Da $y \in D$ beliebig gewählt war, folgt die erste Behauptung.

Sei nun $H_f(x_0)$ positiv definit. Dann haben wir $F''(0) = (y - x_0) \cdot \big(H_f(x_0)(y - x_0)\big) > 0$. Da F'' stetig ist, gibt es ein $t_0 > 0$ derart, dass $F''(t) > 0$ für alle $t \in [0, t_0)$. Jetzt folgt, dass F' auf $[0, t_0]$ strikt wächst. Mit $F'(0) = 0$ schließen wir, dass $F'(t) > 0$ für alle $t \in (0, t_0]$. Es folgt, dass F auf $[0, t_0]$ strikt wächst und damit gilt

$$f(x_0) = F(0) < F(t_0) \leq F(1) = f(y).$$

Aufgabe 19 (K) (a) Bestimmen Sie alle stationären Punkte der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad f(x, y) = (x^2 + 2y^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$$

und entscheiden Sie jeweils, ob f an diesen Stellen ein lokales Maximum oder Minimum hat.

(b) Sei $D := [0, 5] \times [0, 2]$ und

$$g : D \to \mathbb{R}; \quad g(u, v) = \tfrac{1}{2}u^4 - u^2v^2 + 54v - 9.$$

Beweisen Sie, dass es Punkte $x_1, x_2 \in D$ gibt so, dass $g(x_1) = \min_{x \in D} g(x)$ und $g(x_2) = \max_{x \in D} g(x)$. Beweisen Sie weiter, dass x_1, x_2 auf dem Rand von D liegen.

(c) Sei $E = U_1(0, 0)$. Bestimmen Sie alle stationären Punkte der Funktion

$$h : \overline{E} \to \mathbb{R}; \quad h(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy.$$

Zeigen Sie weiter, dass h Maximum und Minimum annimmt und bestimmen Sie diese Werte. *Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass der Rand von $\overline{E}$ gegeben ist durch die Menge* $\{(\cos(\alpha), \sin(\alpha)) \mid \alpha \in [-\pi, \pi]\}$.

Lösung zu Aufgabe 19 (a) Wir behaupten, dass f ein globales Minimum in $(0, 0)$ besitzt und lokale Maxima in den Punkten $(0, 1)$ und $(0, -1)$ und keine weiteren lokalen Extrema. Es ist klar, dass f beliebig oft differenzierbar ist. Für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$\begin{aligned}
\partial_1 f(x, y) &= 2x\mathrm{e}^{-x^2-y^2} - 2x(x^2 + 2y^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2} = (2x - 2x^3 - 4xy^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}, \\
\partial_2 f(x, y) &= 4y\mathrm{e}^{-x^2-y^2} - 2y(x^2 + 2y^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2} = (4y - 2x^2y - 4y^3)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}.
\end{aligned}$$

Es ist bekannt, dass $\mathrm{e}^t \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ergibt sich damit

$$\begin{aligned}
f'(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \quad &\iff \quad 2x - 2x^3 - 4xy^2 = 2x(1 - x^2 - 2y^2) = 0 \ \text{ und } \ 4y - 2x^2y - 4y^3 = 0 \\
&\iff \quad (x = 0 \text{ oder } 1 - x^2 - 2y^2 = 0) \ \text{ und } \ (y = 0 \text{ oder } 2 - x^2 - 2y^2 = 0) \\
&\iff \quad (x = y = 0) \text{ oder } (x = 0 \text{ und } 2 - 2y^2 = 0) \text{ oder } (1 - x^2 = 0 \text{ und } y = 0).
\end{aligned}$$

Der Fall $1 - x^2 - 2y^2 = 0$ und $2 - x^2 - 2y^2 = 0$ ist widersprüchlich, weshalb wir ihn weggelassen haben. Die stationären Punkte sind somit

$$(0, 0), \quad (0, 1), \ (0, -1) \quad \text{und} \quad (1, 0), \ (-1, 0).$$

Beachte, dass $f(0,0) = 0 < f(x,y)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Das zeigt, dass f in $(0,0)$ ein globales (striktes) Minimum hat. Zur weiteren Untersuchung berechnen wir die Hessematrix. Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gelten

$$\begin{aligned}
\partial_1\partial_1 f(x,y) &= (2 - 6x^2 - 4y^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2} - 2x\,\partial_1 f(x,y),\\
\partial_1\partial_2 f(x,y) &= -4xy\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2} - 2x\,\partial_2 f(x,y)\\
\partial_2\partial_2 f(x,y) &= (4 - 2x^2 - 12y^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2} - 2y\,\partial_2 f(x,y).
\end{aligned}$$

In den stationären Punkten sind die partiellen Ableitungen $\partial_1 f$ und $\partial_2 f$ Null. Wir erhalten

$$H_f(0,1) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\mathrm{e}} & 0 \\ 0 & -\frac{8}{\mathrm{e}} \end{pmatrix} = H_f(0,-1).$$

Die Eigenwerte dieser Matrix sind offenbar $-\frac{2}{\mathrm{e}} < 0$ und $-\frac{8}{\mathrm{e}} < 0$. Sie ist also negativ definit und f hat in den Punkten $(0,1)$ und $(0,-1)$ jeweils ein lokales Maximum. Weiter gilt

$$H_f(1,0) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{\mathrm{e}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\mathrm{e}} \end{pmatrix} = H_f(-1,0).$$

Die Eigenwerte dieser Matrix sind $-\frac{4}{\mathrm{e}}$ und $\frac{2}{\mathrm{e}}$, sie ist also indefinit. In den Punkten $(1,0)$ und $(-1,0)$ hat f keine Extrema.

(b) Die Funktion g ist stetig. Weil ihr Definitionsbereich $D = [0,5] \times [0,2]$ beschränkt und abgeschlossen und somit kompakt ist, nimmt g nach Satz 3.3 Minimum und Maximum an. Es gibt also die gesuchten Punkte $x_1, x_2 \in D$.
Als Polynom ist g beliebig oft differenzierbar auf $(0,5) \times (0,2)$. Läge x_j in $(0,5) \times (0,2)$ für $j = 1$ oder $j = 2$, dann würde gelten $g'(x_j) = 0$. Wir berechnen leicht, dass

$$\partial_1 g(u,v) = 2u^3 - 2uv^2 = 2u(u^2 - v^2) \qquad \text{und} \qquad \partial_2 g(u,v) = -2u^2 v + 54.$$

Offenbar gilt

$$\begin{aligned}
\partial_1 g(u,v) = 0 \quad &\iff \quad u = 0 \;\text{ oder }\; (u \neq 0 \text{ und } u^2 = v^2)\\
&\iff \quad u = 0 \;\text{ oder }\; (u \neq 0 \text{ und } v = u) \;\text{ oder }\; (u \neq 0 \text{ und } v = -u).
\end{aligned}$$

Diese Bedingungen setzten wir in $\partial_2 g(u,v)$ ein. Für alle $v \in (0,2)$ ist $\partial_2 g(0,v) = 54 \neq 0$ und damit hat g in $(0,v)$ kein Extremum. Weiter haben wir

$$\partial_2 g(u,u) = -2u^3 + 54 = 0 \quad \iff \quad u = \sqrt[3]{\tfrac{54}{2}} = 3$$

und

$$\partial_2 g(u,-u) = 2u^3 + 54 = 0 \quad \iff \quad u = \sqrt[3]{-\tfrac{54}{2}} = -3.$$

Das zeigt, dass g keine stationären Punkte hat, denn $(3,3)$ und $(-3,3)$ liegen nicht im Definitionsbereich von g. Es folgt, dass g Minimum und Maximum auf dem Rand annehmen muss.

(c) Als Polynom ist h stetig partiell differenzierbar auf E. Die Ableitung ist gegeben durch

$$h'(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 4y & 4y^3 - 4x \end{pmatrix} \quad \text{für alle } (x,y) \in E.$$

Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 4x^3 - 4y & 4y^3 - 4x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \quad &\iff \quad y = x^3 \;\text{ und }\; x = y^3\\
&\iff \quad y = x^3 \;\text{ und }\; x = (x^3)^3 = x^9\\
&\iff \quad y = x^3 \;\text{ und }\; (x = 0 \text{ oder } 1 = x^8)\\
&\iff \quad y = x^3 \;\text{ und }\; (x = 0 \text{ oder } x = 1 \text{ oder } x = -1)\\
&\iff \quad (x,y) \in \{(0,0),(1,1),(-1,-1)\}.
\end{aligned}$$

Von diesen Punkten liegt nur $(0,0)$ in $\overline{E}$. Somit ist $(0,0)$ der einzige stationäre Punkt von h.
Da $\overline{E}$ (beschränkt und abgeschlossen und damit) kompakt ist und h stetig auf $\overline{E}$ nimmt die Funktion ihr Minimum und Maximum an. Wir untersuchen die Werte auf dem Rand S von $\overline{E}$. Es gilt

$$S = \overline{E} \setminus E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} = \{(\cos(\alpha), \sin(\alpha)) \mid \alpha \in [-\pi, \pi]\}.$$

Hierzu betrachten wir $\varphi : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\varphi(\alpha) = h(\cos(\alpha), \sin(\alpha)) = \cos^4(\alpha) + \sin^4(\alpha) - 4\cos(\alpha)\sin(\alpha),$$

denn es ist $\min_{(x,y)\in S} h(x,y) = \min_{\alpha\in[-\pi,\pi]} \varphi(\alpha)$ und genauso für das Maximum. Es ist klar, dass φ differenzierbar ist auf $(-\pi, \pi)$ mit

$$\begin{aligned}
\varphi'(\alpha) &= -4\cos^3(\alpha)\sin(\alpha) + 4\sin^3(\alpha)\cos(\alpha) + 4\sin^2(\alpha) - 4\cos^2(\alpha) \\
&= 4\sin(\alpha)\cos(\alpha)(\sin^2(\alpha) - \cos^2(\alpha)) + 4(\sin^2(\alpha) - \cos^2(\alpha)) \\
&= 4(\sin(\alpha)\cos(\alpha) + 1)(\sin^2(\alpha) - \cos^2(\alpha)).
\end{aligned}$$

Da $(\sin(\alpha)\cos(\alpha) + 1) > 0$, gilt

$$\begin{aligned}
\varphi'(\alpha) = 0 \quad &\iff \quad \sin^2(\alpha) = \cos^2(\alpha) \\
&\iff \quad \sin(\alpha) = \cos(\alpha) \quad \text{oder} \quad \sin(\alpha) = -\cos(\alpha) \\
&\iff \quad \alpha = -\tfrac{3\pi}{4} \quad \text{oder} \quad \alpha = \tfrac{\pi}{4} \quad \text{oder} \quad \alpha = -\tfrac{\pi}{4} \quad \text{oder} \quad \alpha = \tfrac{3\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
h(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}) &= \varphi(\tfrac{\pi}{4}) = (\tfrac{1}{\sqrt{2}})^4 + (\tfrac{1}{\sqrt{2}})^4 - 4(\tfrac{1}{\sqrt{2}})^2 = -\tfrac{6}{4} \\
&= h(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}) = \varphi(-\tfrac{3\pi}{4}), \\
h(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}) &= \varphi(-\tfrac{\pi}{4}) = (\tfrac{1}{\sqrt{2}})^4 + (-\tfrac{1}{\sqrt{2}})^4 - 4\tfrac{1}{\sqrt{2}}(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}) = \tfrac{10}{4} \\
&= h(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}) = \varphi(\tfrac{3\pi}{4}).
\end{aligned}$$

Minimum und Maximum von φ könnten noch in den Randpunkten π bzw. $-\pi$ angenommen werden. Es gilt jedoch $h(-1,0) = \varphi(\pi) = \varphi(-\pi) = (-1)^4 = 1$. Der Vergleich dieser Werte mit $h(0,0) = 0$ zeigt, dass

$$\min_{(x,y)\in\overline{E}} h(x,y) = -\tfrac{6}{4} = -\tfrac{3}{2} \qquad \text{und} \qquad \max_{(x,y)\in\overline{E}} h(x,y) = \tfrac{10}{4} = \tfrac{5}{2}.$$

Aufgabe 20 Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix, also $A^\top = A$.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$q : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}; \quad q(x) = \frac{x \cdot (Ax)}{\|x\|^2}$$

differenzierbar ist, und berechnen Sie ihre Ableitung in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) Beweisen Sie, dass ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ genau dann ein stationärer Punkt von q ist, wenn er ein Eigenvektor von A ist. In diesem Fall ist $q(x)$ der zugehörige Eigenwert.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass A einen reellen Eigenwert besitzt.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $q(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = q(S)$ wobei $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$.

Lösung zu Aufgabe 20 (a) Wir definieren $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; $f(x) := x \cdot (Ax)$ und $g : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$; $g(x) := \frac{1}{\|x\|^2}$. Dann gilt $q(x) = f(x)g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
Die Quotientenregel aus Analysis 1 zeigt, dass g stetig partiell differenzierbar ist und die partiellen Ableitungen

$$\partial_j g(x) = -\frac{2x_j}{\|x\|^4}$$

besitzt für alle $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Das bedeutet, dass $g'(x) = -2\|x\|^{-4}x^\top$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. In Aufgabe 9 (b) auf Übungsblatt 3 haben wir gesehen, dass f differenzierbar ist mit Ableitung

$$f'(x) = x^\top A + (Ax)^\top = x^\top A^\top + (Ax)^\top = 2(Ax)^\top,$$

wobei wir hier auch verwendet haben, dass A symmetrisch ist.
Damit ist auch q differenzierbar ist und für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt

$$\begin{aligned}
\partial_j q(x) &= \lim_{t\to 0} \tfrac{1}{t}\big(f(x+te_j)g(x+te_j) - f(x)g(x)\big) \\
&= \lim_{t\to 0} \tfrac{1}{t}\big(f(x+te_j)g(x+te_j) - f(x)g(x+te_j)\big) + \lim_{t\to 0} \tfrac{1}{t}\big(f(x)g(x+te_j) - f(x)g(x)\big) \\
&= \partial_j f(x)g(x) + f(x)\partial_j g(x).
\end{aligned}$$

für $j \in \{1, \ldots, n\}$ beziehungsweise

$$\begin{aligned}
q'(x) = g(x)f'(x) + f(x)g'(x) &= \frac{1}{\|x\|^2}2(Ax)^\top + x \cdot Ax \frac{-2}{\|x\|^4}x^\top \\
&= \frac{2}{\|x\|^2}\left(Ax - \frac{x \cdot (Ax)}{\|x\|^2}x\right)^\top.
\end{aligned}$$

(b) Aus Teil (a) folgt unmittelbar für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned}
q'(x) = \frac{2}{\|x\|^2}\big(Ax - q(x)x\big)^\top = 0 \quad &\iff \quad Ax = q(x)x \\
&\iff \quad x \text{ ist ein Eigenvektor von } A \text{ zum Eigenwert } q(x).
\end{aligned}$$

(c) Setze $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$. Dann ist S beschränkt und abgeschlossen, also kompakt. Da $q|_S$ stetig ist, nimmt $q|_S$ auf S sein Maximum an. Das heißt, wir finden ein $x_0 \in S$ mit $f(x_0) = \max f(S)$. Aus der Definition von q folgt außerdem

$$q(x) = \frac{x^\top Ax}{\|x\|^2} = \frac{\left(\frac{x}{\|x\|}\right)^\top A\frac{x}{\|x\|}}{1 \cdot 1} = q\Big(\frac{x}{\|x\|}\Big)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Also gilt $q(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = q(S)$. Damit folgt

$$f(x_0) = \max f(S) = \max q(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

Insbesondere ist damit x_0 eine lokale Maximalstelle von q somit ein stationärer Punkt. Nach Teil (b) ist $q(x_0) \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A.

Bemerkung zur Existenz von r aus Aufgabe 18 (b): Da D offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subseteq D$ und $U_\varepsilon(y) \subseteq D$. Wir setzten $r := \varepsilon/\|y - x\|$. Wenn $t \in (-r, 0)$, dann ist $\|t(y-x)\| < \varepsilon$ und somit $x + t(y-x) \in U_\varepsilon(x) \subseteq D$. Auf der anderen Seite gilt für $t \in (1, 1+r)$, dass $t - 1 \in (0, r)$ und deshalb

$$x + t(y-x) = x + y - x + (t-1)(y-x) = y + (t-1)(y-x) \in U_\varepsilon(y) \subseteq D.$$