KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE 15.06.2017
Fakultät für Mathematik
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Lars Machinek

Lösungsvorschlag zum 6. Übungsblatt

Analysis II im SS17

Aufgabe 21 (a) Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \quad f(x,y) = \begin{pmatrix} e^x + e^{-y} \\ e^{x+y} \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass es eine offene Umgebung U des Punktes $(0,0)$ gibt sowie eine offene Umgebung V des Punktes $(2,1)$ so, dass $f|_U : U \to V$ bijektiv ist. Berechnen Sie für die Umkehrfunktion $(f|_U)^{-1} : V \to U$ die Ableitung an der Stelle $(2,1)$.

(b) Zeigen Sie, dass eine offene Umgebung I von $0 \in \mathbb{R}$ existiert und eine Funktion $g \in C^1(I,\mathbb{R})$ mit $g(0) = \pi$, welche die Gleichung

$$xg(x)^2 + 2x^2 e^{g(x)} = \sin(g(x))$$

für alle $x \in I$ erfüllt. Berechnen Sie außerdem $g'(0)$.

Lösung zu Aufgabe 21 (a) Die Funktion f ist offensichtlich stetig partiell differenzierbar und für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} e^x & -e^{-y} \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{pmatrix}, \qquad \text{also} \qquad A := f'(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da $\det A = 2$ nicht Null ist, ist A invertierbar. Der erste Teil der Behauptung folgt aus dem Umkehrsatz. Es ist $f(0,0) = (2,1)$ und der Umkehrsatz liefert weiter, dass

$$\big((f|_U)^{-1}\big)'(2,1) = \big((f|_U)^{-1}\big)'\big(f(0,0)\big) = \big(f'(0,0)\big)^{-1} = A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Anmerkung: Hier kommt man auch ohne den Umkehrsatz aus, da wir eine (sogar globale) Umkehrabbildung angeben können: Wir setzen $a := e^x$ und $b := e^y$, dann erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} u &:= e^x + e^{-y} = a + \frac{1}{b}, \\ v &:= e^{x+y} = ab, \end{aligned}$$

welches nach a, b aufzulösen ist. Es sind $a, b > 0$, und aus der zweiten Gleichung folgt damit auch $v = ab > 0$ sowie $\frac{1}{b} = \frac{a}{v}$. Setzen wir dies in die erste Gleichung ein, so folgt

$$u = a + \frac{a}{v} = a\underbrace{\Big(1 + \frac{1}{v}\Big)}_{>1}, \quad \text{also} \quad a = u\Big(1 + \frac{1}{v}\Big)^{-1} = \frac{uv}{1+v}$$

und damit auch $b = \frac{v}{a} = \frac{1+v}{u}$. Wir definieren also

$$g : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}^2; \quad g(u,v) = \Big(\log\Big(\frac{uv}{1+v}\Big), \log\Big(\frac{1+v}{u}\Big)\Big).$$

Dann rechnet man leicht nach, dass g und f invers zueinander sind. Also $f : \mathbb{R}^2 \to (0,\infty)^2$ bijektiv mit $f^{-1} = g$. Insbesondere ist f injektiv, und man kann $U = \mathbb{R}^2$ und $V = (0,\infty)^2$ wählen. Die Ableitung von $f^{-1} = g$ lässt sich direkt berechnen.

(b) Wir definieren die Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $F(x, y) = xy^2 + 2x^2 \mathrm{e}^y - \sin(y)$. Dann haben wir $F(0, \pi) = -\sin(\pi) = 0$. Weiter ist klar, dass F stetig partiell differenzierbar ist mit

$$\partial_1 F(x, y) = y^2 + 4x\mathrm{e}^y \qquad \text{und} \qquad \partial_2 F(x, y) = 2xy + 2x^2 \mathrm{e}^y - \cos(y)$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Wir sehen, dass $\partial_2 F(0, 0) = -\cos(0) = -1 \neq 0$ und somit invertierbar ist. Nach dem Satz über implizit definierte Funktionen existieren eine offene Umgebung I von 0 und eine Funktion $g \in C^1(I, \mathbb{R})$ mit $g(0) = \pi$ und

$$0 = F(x, g(x)) = xg(x)^2 + 2x^2 \mathrm{e}^{g(x)} - \sin(g(x))$$

für alle $x \in I$. Dies Gleichung ist äquivalent zu der in der Aufgabenstellung angegebenen Gleichung. Ferner besagt der Satz noch, dass

$$g'(0) = -\left(\partial_2 F(0, g(0))\right)^{-1} \partial_1 F(0, g(0)) = -\left(\partial_2 F(0, \pi)\right)^{-1} \partial_1 F(0, \pi) = -(-1) \cdot 0 = 0.$$

Aufgabe 22 (K) (a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 2\sin(y) + \arctan(x)\sin(y) \\ -\mathrm{e}^x \cos(y) \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass es zu jedem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ eine offene Umgebung U gibt derart, dass $f|_U : U \to \mathbb{R}^2$ injektiv ist. Zeigen Sie weiter, dass f nicht injektiv ist.

(b) Zeigen Sie, dass es offene Umgebungen $U \subseteq \mathbb{R}^2$ von $(2, 5)$ und $V \subseteq \mathbb{R}^2$ von $(-1, 0)$ und eine stetig differenzierbare Funktion $g : U \to \mathbb{R}^2$ so gibt, dass alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x^2 + uy + \mathrm{e}^v &= 0, \\ 2x + u^2 - uv &= 5 \end{aligned}$$

in $U \times V$ durch $(x, y, g(x, y))$ mit $(x, y) \in U$ gegeben sind. Berechnen Sie $g'(2, 5)$.

Lösung zu Aufgabe 22 (a) Als Komposition stetig partiell differenzierbarer Funktionen ist $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Sei $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Wir berechnen die Ableitung von f, es ist

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\sin(y)}{1+x^2} & (2 + \arctan(x))\cos(y) \\ -\mathrm{e}^x \cos(y) & \mathrm{e}^x \sin(y) \end{pmatrix}.$$

Um zu zeigen, dass diese Ableitung invertierbar ist betrachten wir die Determinante

$$\det f'(x, y) = \frac{\mathrm{e}^x}{1 + x^2} \sin^2(y) + (2 + \arctan(x))\mathrm{e}^x \cos^2(y).$$

Es ist bekannt, dass $\frac{\mathrm{e}^x}{1+x^2} > 0$. Des weiteren ist $\sin^2(y) + \cos^2(y) = 1$ und somit $\sin^2(y) > 0$ falls $\cos^2(y) = 0$ bzw. $\cos^2(y) > 0$ falls $\sin^2(y) = 0$. Schließlich gilt $\arctan(x) > -\frac{\pi}{2} > -2$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Insgesamt folgt, dass $\det f'(x, y) > 0$. Da $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ beliebig gewählt war, ist $f'(x, y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ invertierbar. Der Umkehrsatz liefert die erste Behauptung.
Da zum Beispiel $f(0, 0) = (0, -1) = f(0, 2\pi)$, ist f nicht injektiv.

(b) Um den Satz über implizit definierte Funktionen anwenden zu können, definieren wir die Abbildung $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$F(x, y, u, v) = \begin{pmatrix} x^2 + uy + \mathrm{e}^v \\ 2x + u^2 - uv - 5 \end{pmatrix}$$

Offenbar löst ein Tupel $(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4$ genau dann das Gleichungssystem aus der Aufgabenstellung, wenn $F(x, y, u, v) = (0, 0)$ gilt. Beachte, dass auch $F(2, 5, -1, 0) = (4 - 5 + 1, 4 + 1 - 5) = (0, 0)$. Weiter ist klar, dass F stetig partiell differenzierbar ist und wir berechnen

$$F'(x, y, u, v) = \begin{pmatrix} 2x & u & y & \mathrm{e}^v \\ 2 & 0 & 2u - v & -u \end{pmatrix}.$$

Also gilt

$$\frac{\partial F}{\partial(u,v)}(2,5,-1,0) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat die Determinante $7 \neq 0$ und ist somit invertierbar. Ihre Inverse ist

$$\left(\frac{\partial F}{\partial(u,v)}(2,5,-1,0)\right)^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Nach dem Satz über implizit definierte Funktionen gibt es offene Umgebungen $U \subseteq \mathbb{R}^2$ von $(2,5)$ und $V \subseteq \mathbb{R}^2$ von $(-1,0)$, sowie eine stetig differenzierbare Abbildung $g : U \to V$ mit $g(2,5) = (-1,0)$ und $F(x,y,g(x,y)) = 0$ für alle $(x,y) \in U$. Die Eindeutigkeitsaussage ist ebenfalls Teil des Satzes über implizit definierte Funktionen. Schließlich gilt noch die Formel für die Ableitung

$$g'(2,5) = -\left(\frac{\partial F}{\partial(u,v)}(2,5,-1,0)\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial(x,y)}(2,5,-1,0) = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 18 & -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 23 (K) (a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{pmatrix} x^3 - xy^2 \\ x^2y - y^3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle $x_0 \in \mathbb{R}^2$ für die offene Mengen $U, V \subseteq \mathbb{R}^2$ existieren mit $x_0 \in U$ und $f(x_0) \in V$ so, dass $f|_U : U \to V$ bijektiv ist und eine stetig differenzierbare Umkehrfunktion besitzt. Bestimmen Sie in diesem Fall auch $(f^{-1})'(f(x_0))$.
Hinweis: Der Umkehrsatz liefert nur eine hinreichende Bedingung.

(b) In der Vorlesung wurde der Satz über implizit definierte Funktionen mit Hilfe des Umkehrsatzes nachgewiesen. Es lässt sich auch der Umkehrsatz unter Verwendung des Satzes über implizit definierte Funktionen beweisen. Führen Sie diesen Beweis aus.
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $F : D \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$; $F(x,y) = f(x) - y$

Lösung zu Aufgabe 23 (a) Wir werden zeigen, dass f lokal bijektiv ist für alle $x_0 = (u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $|u_0| \neq |v_0|$. Für $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $|u_0| = |v_0|$ gibt es keine offene Umgebung U von (u_0, v_0) für die $f|_U$ injektiv ist.
Als Polynome sind beide Komponenten von f stetig partiell differenzierbar. Also habe wir $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ und für alle $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$f'(u,v) = \begin{pmatrix} 3u^2 - v^2 & -2uv \\ 2uv & u^2 - 3v^2 \end{pmatrix}.$$

Wir schließen, dass

$$\det(f'(u,v)) = (3u^2 - v^2)(u^2 - 3v^2) + (2uv)^2 = 3u^4 - 6u^2v^2 + 3v^4 = 3(u^2 - v^2)^2.$$

genau dann 0 ist, wenn $u^2 = v^2$ gilt oder äquivalent $|u| = |v|$. Ist also $x_0 = (u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $|u_0| \neq |v_0|$, dann ist $f'(x_0)$ invertierbar und nach dem Umkehrsatz gibt es offene Mengen $U, V \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $x_0 \in U$ derart, dass $f|_U : U \to V$ bijektiv ist. Weiter besagt der Umkehrsatz, dass $(f|_U)^{-1} : V \to U$ stetig differenzierbar ist mit der Ableitung

$$\big((f|_U)^{-1}\big)'(f(u,v)) = \big(f'(u,v)\big)^{-1} = \frac{1}{3(u^2 - v^2)^2}\begin{pmatrix} u^2 - 3v^2 & 2uv \\ -2uv & 3u^2 - v^2 \end{pmatrix} \quad \text{für alle } (u,v) \in U.$$

Der Umkehrsatz liefert aber nur eine hinreichende Bedingung für lokale Umkehrbarkeit. Daher müssen wir die Punkte $x_0 = (u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $|u_0| = |v_0|$ separat betrachten. Dann ist $v_0 = u_0$ oder $v_0 = -u_0$. Beachte, dass

$$f(u,u) = \begin{pmatrix} u^3 - uu^2 & u^2u - u^3 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^\top = f(u,-u)$$

für alle $u \in \mathbb{R}$. Sei zunächst $v_0 = u_0$. Weiter sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann liegt $x_1 := x_0 + \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ in $U_\varepsilon(x_0)$, denn $\|x_1 - x_0\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Da die Komponenten von x_1 identisch sind, gilt allerdings $f(x_1) = 0 = f(x_0)$ und somit ist $f|_{U_\varepsilon(x_0)}$ nicht injektiv. Das zeigt, dass f nicht lokal invertierbar ist in der Nähe von x_0. Im

Fall $v_0 = -u_0$ betrachten wir zu beliebigem $\varepsilon > 0$ analog den Vektor $x_1 = x_0 + \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$ und erhalten genauso, dass $x_1 \in U_\varepsilon(x_0)$ und $f(x_1) = 0 = f(x_0)$.

(b) **Voraussetzung:** Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und nichtleer, sowie $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$. Ferner sei $x_0 \in D$ mit $\det(f'(x_0)) \neq 0$.

Behauptung: Es existieren offene Mengen $U \subseteq D$ und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $x_0 \in U$ so, dass $f|_U : U \to V$ bijektiv ist und $(f|_U)^{-1} \in C^1(V, \mathbb{R}^n)$. Außerdem gelten $\det(f'(x)) \neq 0$ und

$$\big((f|_U)^{-1}\big)'(f(x)) = (f'(x))^{-1} \quad \text{für alle } x \in U.$$

Beweis: Wir definieren $F : D\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch $F(x,y) := f(x)-y$. Dann gilt $F(x_0, f(x_0)) = 0$ und es ist $F \in C^1(D \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Für festes $y \in \mathbb{R}^n$ ist die Abbildung $F(\,\cdot\,, y) : D \to \mathbb{R}^n$; $x \mapsto F(x,y)$ differenzierbar. Die Ableitung bezeichnen wir mit $\frac{\partial F}{\partial x}$. Wir haben

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = f'(x) \quad \text{für alle } x \in D, y \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Wir schließen, dass

$$\det\left(\frac{\partial F}{\partial x}\big(x_0, f(x_0)\big)\right) = \det f'(x_0) \neq 0.$$

Der Satz über implizit definierte Funktionen liefert nun eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $f(x_0) \in V$ und eine Funktion $g \in C^1(V, \mathbb{R}^n)$ mit $g(V) \subseteq D$ und den Eigenschaften

$$\forall y \in V: \; F(g(y), y) = 0. \tag{2}$$

$$\forall (x,y) \in g(V) \times V: \; F(x,y) = 0 \implies x = g(y), \tag{3}$$

Wir definieren $U := g(V)$. Als nächstes weisen wir nach, dass $f|_U$ injektiv ist. Sei dazu $x \in U$. Dann gibt es ein $y \in V$ mit $g(y) = x$. Für jedes $\tilde{x} \in U$ mit $f(\tilde{x}) = f(x)$ gilt wegen (2) dann

$$F(\tilde{x}, y) = f(\tilde{x}) - y = f(x) - y = F(g(y), y) = 0$$

und mit der Eindeutigkeit aus (3) folgt $\tilde{x} = g(y) = x$. Folglich ist $f|_U$ injektiv. Wir sehen weiter, dass $f(x) = y \in V$ für jedes $x \in U$. Somit bildet f die Menge U injektiv auf V ab.
Um zu zeigen, dass $f|_U : U \to V$ surjektiv ist, sei $y \in V$ beliebig. Für $x := g(y) \in U$ erhalten wir mit (2) sofort, dass $f(x) = y$. Insgesamt ist die Abbildung $f|_U : U \to V$ bijektiv und die Umkehrabbildung ist g. Da f stetig ist, ist $U = (f|_U)^{-1}(V)$ offen als Urbild einer offenen Menge.
Sei wieder $x \in U$ und sei $y = f(x) \in V$, sodass $x = g(y)$. Der Satz über implizit definierte Funktionen besagt ferner, dass $\frac{\partial F}{\partial x}(g(y), y)$ invertierbar ist für alle $y \in V$. Mit (1) folgt, dass

$$\det f'(x) = \det f'(g(y)) = \det\left(\frac{\partial F}{\partial x}(g(y), y)\right) \neq 0,$$

also $f'(x)$ invertierbar ist. Schließlich beachte, dass $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = -I_n$ die Einheitsmatrix auf $\mathbb{R}^n$ ist. Die Differenzierbarkeitsaussage aus dem Satz über implizit definierte Funktionen und die Identität $g = f^{-1}$ zusammen mit (1) liefern nun

$$(f^{-1})'(f(x)) = g'(f(x)) = -\left(\frac{\partial F}{\partial x}(g(y), y)\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial y}(g(y), y) = -\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \big(f'(x)\big)^{-1}.$$

Aufgabe 24 Finden Sie jeweils eine Funktion $F \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ mit $F(0,0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 0$ und der folgenden Eigenschaft.

(a) In jeder Umgebung von 0 gibt es ein x, für das die Gleichung $F(x,y) = 0$ keine Lösung besitzt.

(b) Die Gleichung $F(x,y) = 0$ hat für jedes $x \neq 0$ genau zwei verschiedene Lösungen (x, y_1) und (x, y_2).

(c) Die Gleichung $F(x, y) = 0$ kann in einer Umgebung von 0 eindeutig nach y aufgelöst werden und die Lösung $x \mapsto y(x)$ ist in 0 nicht differenzierbar.

(d) Die Gleichung $F(x, y) = 0$ kann in einer Umgebung von 0 eindeutig nach y aufgelöst werden und die Lösung $x \mapsto y(x)$ ist stetig differenzierbar.

Lösung zu Aufgabe 24 Die im folgenden definierten Funktionen $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sind als Polynomfunktionen alle stetig differenzierbar und erfüllen offensichtlich $F(0, 0) = 0$ sowie $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 0$.

(a) Definiere $F(x, y) := x^2 + y^2$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ gilt $x^2 + y^2 > 0$. Also hat die Gleichung $F(x, y) = 0$ für kein $x \neq 0$ eine Lösung.

(b) Betrachte $F(x, y) := x^4 - y^2$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Die Gleichung $x^4 = y^2$ ist äquivalent zu $y = \pm x^2$. Also hat die Gleichung $F(x, y) = 0$ für jedes $x \neq 0$ genau die beiden Lösungen (x, x^2) und $(x, -x^2)$.

(c) Definiere $F(x, y) := x - y^3$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Die Gleichung $x = y^3$ hat für jedes $x \in \mathbb{R}$ die eindeutige Lösung $y(x) = \sqrt[3]{x}$. Es ist bekannt, dass die Abbildung $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ in 0 nicht differenzierbar ist.

(d) Betrachte $F(x, y) := x^9 - y^3$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Die Gleichung $x^9 = y^3$ hat für $x \in \mathbb{R}$ die eindeutige Lösung $y(x) = x^3$ und die Abbildung $x \mapsto x^3$ ist stetig differenzierbar.