KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE 22.06.2017
Fakultät für Mathematik
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Lars Machinek

Lösungsvorschlag zum 7. Übungsblatt

Analysis II im SS17

Aufgabe 25 (a) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $f(x,y) = xy^2$ auf der Menge

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(x,y) = 0\}$$

Minimum und Maximum annimmt und bestimmen Sie diese sowie die zugehörigen Extremalstellen. Hierbei sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 1$.

(b) Es sei $M = E \cap K \subseteq \mathbb{R}^3$ wobei

$$E := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + 2z = 3\} \quad \text{und} \quad K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2 + y^2 = z^2\}$$

Zeigen Sie, dass es Punkte $\xi_0, \zeta_0 \in M$ gibt mit

$$\|\xi_0\| = \min_{\xi \in M} \|\xi\| \quad \text{und} \quad \|\zeta_0\| = \max_{\xi \in M} \|\xi\|$$

und bestimmen Sie diese.

Lösung zu Aufgabe 25 (a) Die Funktion φ ist stetig und die Menge $\{0\}$ ist abgeschlossen. Also ist $T = \varphi^{-1}(\{0\})$ als Urbild einer abgeschlossenen Menge unter einer stetigen Funktion abgeschlossen. Für $(x,y) \in T$ gilt weiter $\|x,y\| = \sqrt{x^2+y^2} = 1$, sodass T beschränkt ist. Es folgt, dass T kompakt ist. Somit nimmt $f|_T$ als stetige Funktion auf einer kompakten Menge Minimum und Maximum an. D.h. es gibt $\xi_0, \zeta_0 \in T$ mit

$$f(\xi_0) = \min_{\xi \in T} f(\xi) \quad \text{und} \quad f(\zeta_0) = \max_{\xi \in T} f(\xi).$$

Es ist klar, dass $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ und, dass $\varphi'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \end{pmatrix}$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Wir sehen, dass

$$\operatorname{Rang} \varphi'(x,y) = 0 \quad \iff \quad x = 0 = y.$$

Da jedoch $\varphi(0,0) = -1 \neq 0$ ist $(0,0) \notin T$ und damit gilt $\operatorname{Rang} \varphi'(x,y) = 1$ für alle $(x,y) \in T$. Die Multiplikatorenregel von Lagrange ist also anwendbar. Sie besagt, dass es $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ gibt so, dass (ξ_0, λ_1) und (ζ_0, λ_2) Lösungen sind von $H'(x,y,\lambda) = 0$, wobei $H : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $H(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$ ist. Schreiben wir die Gleichung $H'(x,y,\lambda) = 0$ aus, dann erhalten wir das System

$$\text{(I) } 0 = y^2 + \lambda 2x, \qquad \text{(A) } x^2 + y^2 = 1,$$
$$\text{(II) } 0 = 2xy + \lambda 2y.$$

Wir bestimmen nun alle Lösungen von (I), (II), (A).
Zuerst ist (II) äquivalent zu $0 = y(x + \lambda)$ und damit $y = 0$ oder $\lambda = -x$. Im Fall $y = 0$ folgt mit (A) direkt, dass $x = 1$ oder $x = -1$. Es gilt

$$f(\pm 1, 0) = 0.$$

Falls $y \neq 0$, dann ist also $\lambda = -x$. Gleichung (I) liefert $y^2 = 2x^2$. Das setzen wir in (A) ein und erhalten $x^2 = \frac{1}{3}$ und schließlich $y^2 = \frac{2}{3}$. Somit ist

$$\left\{(1,0), (-1,0), \left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right), \left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right), \left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right), \left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\right\}$$

die Menge aller Lösungen von (I), (II), (A). Die Vektoren ξ_0 und ζ_0 liegen in dieser Menge. Der Vergleich von $f(\pm 1, 0)$ mit den Funktionswerten

$$\begin{aligned} f\big(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\big) = f\big(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\big) &= \tfrac{1}{\sqrt{3}}\tfrac{2}{3} \quad > 0 \\ f\big(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\big) = f\big(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\big) &= -\tfrac{1}{\sqrt{3}}\tfrac{2}{3} < 0 \end{aligned}$$

zeigt, dass $\xi_0 = \big(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\big)$ oder $\xi_0 = \big(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\big)$ und $\zeta_0 = \big(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\big)$ oder $\zeta_0 = \big(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\big)$

Bemerkung: *Die Punkte ξ_0 und ζ_0 kann man auch anders auffinden. Die Nebenbedingung $x^2 + y^2 - 1$ lässt sich äquivalent schreiben als $y^2 = 1 - x^2$. Das können wir in die Funktion f einsetzen und erhalten $g(x) := f(x, 1 - x^2) = x - x^3$ für $x \in [-1, 1]$. Die Extremalstellen von $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ ergeben die Extremalstellen von f unter der Nebenbedingung $\varphi = 0$.*

(b) *Behauptung:* $\|(0, 1, 1)\| = \min_{v\in M} \|v\| = \sqrt{2}$ und $\|(0, -3, 3)\| = \max_{v\in M} \|v\| = \sqrt{18}$.

Beweis: (i) Wir zeigen, dass $M = E \cap K$ kompakt ist. Wir definieren $g \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ durch

$$g(x, y, z) := \begin{pmatrix} y + 2z - 3 \\ 2x^2 + y^2 - z^2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $M = g^{-1}(\{(0, 0)\})$ abgeschlossen, da $\{(0, 0)\}$ abgeschlossen ist. Es sei $(x, y, z) \in M$, es gelte also $y + 2z = 3$ und $2x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Dann haben wir

$$0 = 2x^2 + y^2 - \frac{1}{4}(3 - y)^2 = 2x^2 + \frac{3}{4}y^2 + \frac{3}{2}y - \frac{9}{4}.$$

Für jedes $\alpha > 0$ existiert ein $C > 0$ mit $\frac{3}{2}|y| \le C + \alpha y^2$ (z.B. $C = 3$ für $\alpha = \frac{1}{2}$ und $C = 6$ für $\alpha = \frac{1}{4}$) und damit

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 \le 2x^2 + \frac{3}{4}y^2 = \frac{9}{4} - \frac{3}{2}y \le \frac{9}{4} + \frac{3}{2}|y| \le \frac{9}{4} + 3 + \frac{1}{2}y^2.$$

Dann folgt $x^2 \le \frac{9}{2} + 6 =: S_1$ und

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 \le 2x^2 + \frac{3}{4}y^2 = \frac{9}{4} - \frac{3}{2}y \le \frac{9}{4} + \frac{3}{2}|y| \le \frac{9}{4} + 6 + \frac{1}{4}y^2$$

also

$$y^2 \le 4\big(\frac{9}{4} + 6 - \frac{1}{2}x^2\big) \le 33 + 2\big(\frac{9}{2} + 6\big) =: S_2 < \infty.$$

Also ist $|y| < \sqrt{S_2}$ und wegen $2z = 3 - y$ folgt damit $|z| < \frac{1}{2}(3 + \sqrt{S_2})$. Insgesamt haben wir also

$$\|(x, y, z)\| = \big(x^2 + y^2 + z^2\big)^{\frac{1}{2}} \le \big(S_1 + S_2 + \frac{1}{4}(3 + \sqrt{S_2})^2\big)^{\frac{1}{2}}$$

und damit ist M beschränkt.
Der Satz von Heine-Borel liefert, dass M kompakt ist.

(ii) Wir definieren $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ durch $f(x, y, z) := \|(x, y, z)\|^2$. Dann existieren $a, b \in M$ mit $f(a) = \min(f(M))$ und $f(b) = \max(f(M))$. Außerdem gilt für $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, dass

$$g'(x, y, z) = J_g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4x & 2y & -2z \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\operatorname{Rang} g'(x, y, z) = 2 \iff x \ne 0 \ \text{ oder } z \ne -2y.$$

Wir setzen

$$D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \ne 0 \ \text{ oder } \ z \ne -2y\}$$

und stellen fest, dass D offen ist und $M \subseteq D$. Außerdem gilt $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ und $g \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$. Existiert bei $\gamma \in M$ ein Extremum von f mit Nebenbedingung $g(\gamma) = 0$, so existiert nach Satz 11.2 ein $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ mit

$$f'(\gamma) = -\lambda \cdot J_g(\gamma) \iff 2\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = -\lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2\lambda_2 \begin{pmatrix} 2\gamma_1 \\ \gamma_2 \\ -\gamma_3 \end{pmatrix}.$$

Dies schreiben wir als

$$\gamma_1 = -2\lambda_2\gamma_1, \tag{1}$$
$$2\gamma_2 = -\lambda_1 - 2\lambda_2\gamma_2, \tag{2}$$
$$\gamma_3 = -\lambda_1 + \lambda_2\gamma_3. \tag{3}$$

Annahme: Es gelte $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$. Dann gilt

$$(2) \iff \gamma_2 = -\lambda_1 \;\text{ und }\; (3) \iff \gamma_3 = -\frac{2}{3}\lambda_1.$$

Dann gilt

$$g_1(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = 0 \iff \gamma_3 = \frac{6}{7} \;\text{ und }\; \gamma_2 = \frac{9}{7}$$

also

$$g_2(\gamma_1, \frac{9}{7}, \frac{6}{7}) = 0 \implies \gamma_1^2 < 0.$$

Das ist ein Widerspruch und daher gilt $\lambda \neq -\frac{1}{2}$.
Dann gilt

$$(1) \iff \gamma_1 = 0$$

und

$$g_2(0, \gamma_2, \gamma_3) = 0 \iff |\gamma_2| = |\gamma_3|.$$

Dies impliziert

$$g_1(0, \gamma_2, \gamma_3) = 0 \iff \gamma_2 = \gamma_3 = 1 \;\text{ oder }\; \gamma_2 = -\gamma_3 = -3.$$

Als mögliche Stellen für ein Extremum von f unter der Nebenbedingung $g(x, y, z) = (0, 0)$ kommen nur die Punkte

$$v_1 = (0, 1, 1) \;\text{ und }\; v_2 = (0, -3, 3)$$

in Frage. Da wir schon wissen, dass $\min(f(M))$ und $\max(f(M))$ in M angenommen werden, müssen wir nur noch die Funktionswerte von v_1 und v_2 vergleichen. Es gilt

$$f(v_1) = 2 \;\text{ und }\; f(v_2) = 18.$$

Daher folgt

$$\min_{v \in M} \|v\| = \sqrt{2} \;\text{ und }\; \max_{v \in M} \|v\| = \sqrt{18}.$$

Aufgabe 26 (K) (a) Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z$. Weiter sei

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-1)^2 + y^2 = 5 \text{ und } z = y\}.$$

Zeigen Sie, dass $f|_T$ Minimum und Maximum annimmt.
Zeigen Sie, dass die Multiplikatorenregel von Lagrange anwendbar ist.
Bestimmen Sie $\xi_0, \zeta_0 \in T$ mit $f(\xi_0) = \min_{\xi \in T} f(\xi)$ und $f(\zeta_0) = \max_{\xi \in T} f(\xi)$.

(b) Bestimmen Sie alle Stellen lokaler Extrema, das Minimum und das Maximum von

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}; \quad f(x, y, z) = 6x + y - 4z$$

auf der Menge $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \text{ und } \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{2}\}$.

Lösung zu Aufgabe 26 (a) Wir definieren $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\varphi(x, y, z) = \begin{pmatrix} (x-1)^2 + y^2 - 5 \\ y - z \end{pmatrix}.$$

Als Komposition von stetig differenzierbaren Funktionen ist $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$. Insbesondere ist φ stetig. Beachte, dass $T = \varphi^{-1}(\{(0, 0)\})$. Da $\{(0, 0)\}$ abgeschlossen ist, ist T abgeschlossen. Sei $(x, y, z) \in T$. Dann ist $z^2 = y^2 \leq (x-1)^2 + y^2 = 5$, also

$$\|(x, y, z)\| \leq \|(x-1, y, y)\| + \|(1, 0, 0)\| \leq \sqrt{5 + 5} + 1.$$

Das zeigt, dass T beschränkt ist. Insgesamt ist T kompakt. Offenbar ist f eine stetige Funktion und nimmt als solche auf T Minimum und Maximum an. Es gibt also $\xi_0, \zeta_0 \in T$ wie in der Aufgabenstellung behauptet.
Die Voraussetzung der Mulitplikatorenregel die noch nicht geprüft wurde ist, dass $\varphi'(\xi_0)$ und $\varphi'(\zeta_0)$ vollen Rang haben. Es gilt

$$\varphi'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2(x-1) & 2y & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wir sehen, dass $\operatorname{Rang} \varphi'(x,y,z) \geq 1$ für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ und dass

$$\operatorname{Rang} \varphi'(x,y,z) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 1 \text{ und } y = 0.$$

Da aber $\varphi_1(1,0,z) = -5 \neq 0$, haben wir $\operatorname{Rang} \varphi'(x,y,z) = 2$ für alle $(x,y,z) \in T$.
Wir bestimmen nun alle Lösungen $(x,y,z,\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ der Gleichungen

$$\begin{aligned} \text{(I) } 0 &= 2x + \lambda 2(x-1), & \text{(A) } (x-1)^2 + y^2 = 5, \\ \text{(II) } 0 &= 2y + \lambda 2y + \mu, & \text{(B) } z = y, \\ \text{(III) } 0 &= 1 + \lambda 0 - \mu. \end{aligned}$$

Gleichung (III) bedeutet, dass $\mu = 1$. Weiter ist (II) äquivalent zu $-1 = 2y(1+\lambda)$. Das zeigt, dass $\lambda \neq -1$. Gleichung (I) lässt sich schreiben als $\lambda = x(1+\lambda)$. Es folgt nun, dass

$$x = \frac{\lambda}{1+\lambda} \quad \text{ und } z = y = \frac{-1}{2(1+\lambda)}.$$

Setzen wir dies in (A) ein, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} 5 = \left(\frac{\lambda}{1+\lambda} - 1\right)^2 + \left(\frac{-1}{2(1+\lambda)}\right)^2 &= \left(\frac{\lambda - 1 - \lambda}{1+\lambda}\right)^2 + \frac{1}{4}\frac{1}{(1+\lambda)^2} = \frac{5}{4}\frac{1}{(1+\lambda)^2} \\ &\Longleftrightarrow \quad (1+\lambda)^2 = \tfrac{1}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad 1+\lambda = \tfrac{1}{2} \text{ oder } 1+\lambda = -\tfrac{1}{2} \\ &\Longleftrightarrow \quad \lambda = -\tfrac{1}{2} \text{ oder } \lambda = -\tfrac{3}{2}. \end{aligned}$$

Es folgt, dass (I) – (III), (A), (B) genau die zwei Lösungen

$$(3,1,1,-\tfrac{3}{2},1), \quad (-1,-1,-1,-\tfrac{1}{2},1)$$

besitzt. Der Vergleich von $f(3,1,1) = 11$ und $f(-1,-1,-1) = 1$ zeigt, dass $\xi_0 = (-1,-1,-1)$ und $\zeta_0 = (3,1,1)$.

(b) Wir setzen

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2; \quad \varphi(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x^2+y^2+z^2-\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ genau dann $(x,y,z) \in T$, wenn $\varphi(x,y,z) = (0,0)$. Mit dem gleichen Argument wie oben sehen wir, dass $T = \varphi^{-1}(\{(0,0)\})$ abgeschlossen ist. Die Bedingung $x^2+y^2+z^2 = 1$ in der Definition von T legt fest, dass $\|(x,y,z)\| = 1$ für alle $(x,y,z) \in T$. Somit ist T beschränkt. Insgesamt ist T kompakt. Die Einschränkung der stetigen Funktion f auf die kompakte Menge T nimmt Mininum und Maximum an.
Die Multiplikatorenregel von Lagrange ist sicher anwendbar, wenn

$$\varphi'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$$

Rang 2 hat für alle $(x,y,z) \in T$. Das ist der Fall, denn es ist leicht zu sehen, dass $\operatorname{Rang} \varphi'(x,y,z) < 2$ genau dann wenn $x = y = z$. Weil

$$\varphi(x,x,x) = \begin{pmatrix} 3x \\ 3x^2 - \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0 \text{ und } x^2 = \frac{1}{12}.$$

widersprüchlich ist, ist $(x,x,x) \notin T$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Jede Stelle (x,y,z) eines lokalen Extremums von f liefert eine Lösungen $(x,y,z,\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ der Gleichungen

$$\begin{aligned} &\text{(I) } 0 = 6 + \lambda + \mu 2x, &&\text{(A) } x+y+z=0,\\ &\text{(II) } 0 = 1 + \lambda + \mu 2y, &&\text{(B) } x^2+y^2+z^2 = \tfrac{1}{4},\\ &\text{(III) } 0 = -4 + \lambda + \mu 2z. \end{aligned}$$

Wir bestimmen also alle diese Lösungen.
Wäre $\mu = 0$ so folgt mit (I), dass $\lambda = -6$, aber (II) würde $\lambda = -1$ liefern. Also ist $\mu \neq 0$ und wir können (I), (II) und (III) nach x bzw. y bzw. z auflösen. Wir erhalten

$$x = \frac{1}{2\mu}(-\lambda - 6), \quad y = \frac{1}{2\mu}(-\lambda - 1), \quad z = \frac{1}{2\mu}(-\lambda + 4).$$

Setzen wir dies in (A) ein, dann erhalten wir, dass $\frac{1}{2\mu}(-3\lambda - 3) = 0$ und es folgt, dass $\lambda = -1$. Das bedeutet

$$x = \frac{-5}{2\mu}, \quad y = 0, \quad z = \frac{5}{2\mu}.$$

Bedingung (B) liefert nun die Gleichung $2\frac{25}{4}\frac{1}{\mu^2} = \frac{1}{4}$. Sie hat zwei Lösungen, es gilt $\mu = 5\sqrt{2}$ oder $\mu = -5\sqrt{2}$. Es folgt, dass

$$(x,y,z) = \big(-\tfrac{1}{2\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{2\sqrt{2}}\big) \quad \text{oder} \quad (x,y,z) = \big(\tfrac{1}{2\sqrt{2}}, 0, -\tfrac{1}{2\sqrt{2}}\big).$$

Der Vergleich der Funktionswerte

$$f\big(-\tfrac{1}{2\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{2\sqrt{2}}\big) = \tfrac{-10}{2\sqrt{2}} = -\tfrac{5}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad f\big(\tfrac{1}{2\sqrt{2}}, 0, -\tfrac{1}{2\sqrt{2}}\big) = \tfrac{5}{\sqrt{2}}$$

zeigt, dass f sein Minimum im Punkt $\big(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{2\sqrt{2}}\big)$ annimmt und entsprechend das Maximum in $\big(\frac{1}{2\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\big)$. Es gibt keine weiteren Stellen lokaler Extrema.

Aufgabe 27 (K) (a) Berechnen Sie jeweils die Weglängenfunktion des angegebenen Weges γ.

(1) $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$; $\quad \gamma(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t), \cos(\frac{t}{2}))$.

(2) $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$; $\quad \gamma(t) = (t^2\cos(t), t^2\sin(t), \frac{t^3}{3})$.

(b) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes nicht leeres Intervall sowie $h \in C([a,b],\mathbb{R}^n)$. Weiter gebe es $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ so, dass $h|_{[t_{k-1},t_k]} \in C^1([t_{k-1},t_k],\mathbb{R}^n)$ für alle $k \in \{1,\dots,m\}$. Zeigen Sie, dass $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^{n+1}$ definiert durch

$$\gamma(t) := (t, h(t)).$$

rektifizierbar ist und bestimmen Sie die zugehörige Weglängenfunktion.
$h|_{[t_{k-1},t_k]} \in C^1([t_{k-1},t_k],\mathbb{R}^n)$ *bedeutet, dass für jedes* $j \in \{1,\dots,n\}$ *die Komponentenfunktion* h_j *stetig differenenziebar ist auf* $[t_{k-1},t_k]$, *d.h.* $h_j \in C^1([t_{k-1},t_k],\mathbb{R})$. *Insbesondere existieren linksseitige und rechtsseitige Ableitung von* h_j *in den Punkten* t_k, *müssen aber nicht gleich sein.*

Lösung zu Aufgabe 27 (a) (1) Es ist klar, dass $\gamma \in C^1([0,2\pi],\mathbb{R}^3)$. Weiter gilt

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \\ -\frac{1}{2}\sin(\frac{t}{2}) \end{pmatrix} \quad \text{für alle } t \in [0,2\pi].$$

Die Weglängenfunktion $s : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ lässt sich nach Satz 12.5 wie folgt bestimmen. Mit den bekannten Additionstheoreme für sin und cos berechnen wir, dass

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \|\gamma'(\sigma)\| \,\mathrm{d}\sigma = \int_0^t \big((1-\cos(\sigma))^2 + \sin^2(\sigma) + \tfrac{1}{4}\sin^2(\tfrac{\sigma}{2})\big)^{\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}\sigma \\ &= \int_0^t \big(2 - 2\cos(\sigma) + \tfrac{1}{4}\sin^2(\tfrac{\sigma}{2})\big)^{\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}\sigma = \int_0^t \big(2 - 2\cos^2(\tfrac{\sigma}{2}) + \tfrac{9}{4}\sin^2(\tfrac{\sigma}{2})\big)^{\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}\sigma \\ &= \sqrt{17}\int_0^t \tfrac{1}{2}\sin(\tfrac{\sigma}{2}) \,\mathrm{d}\sigma = \sqrt{17}\int_0^{\frac{t}{2}} \sin(\tilde\sigma) \,\mathrm{d}\tilde\sigma = \sqrt{17}\big(1 - \cos(\tfrac{t}{2})\big) \quad \text{für alle } t > 0. \end{aligned}$$

(a) (2) Es ist klar, dass $\gamma \in C^1([0,1],\mathbb{R}^3)$. Weiter gilt

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 2t\cos(t) - t^2\sin(t) \\ 2t\sin(t) + t^2\cos(t) \\ t^2 \end{pmatrix} \quad \text{für alle } t \in [0,1].$$

Mit den gleichen Resultaten wie oben folgt, dass

$$\begin{aligned} s(t) := \int_0^t \|\gamma'(\sigma)\| \,\mathrm{d}\sigma &= \int_0^t \left((2\sigma\cos(\sigma) - \sigma^2\sin(\sigma))^2 + (2\sigma\sin(\sigma) + \sigma^2\cos(\sigma))^2 + \sigma^4\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}\sigma \\ &= \int_0^t \left(4\sigma^2 + 2\sigma^4\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}\sigma = \frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^t 3\sigma(2+\sigma^2)^{\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}\sigma \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3}[(2+\sigma^2)^{\frac{3}{2}}]_0^t = \frac{\sqrt{2}}{3}\left((2+t^2)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\right) \qquad \text{für alle } t > 0. \end{aligned}$$

(b) Wir setzen $J_k := [t_{k-1}, t_k]$ für $k \in \{1,\ldots,m\}$. Dann ist offenbar

$$\gamma = \gamma|_{J_1} \oplus \cdots \oplus \gamma|_{J_m}.$$

Nach Satz 12.2 ist γ genau dann rektifizierbar, wenn für alle $k \in \{1,\ldots,m\}$ der Weg $\gamma|_{J_k}$ rektifizierbar ist. Weiter gilt für $t \in (t_{k-1}, t_k]$, dass

$$s(t) = L(\gamma|_{[a,t]}) = L(\gamma|_{J_1}) + \ldots + L(\gamma|_{J_{k-1}}) + L(\gamma|_{[t_{k-1},t]})$$

Es reicht also die Teilstücke $\gamma|_{J_k}$ von γ zu betrachten.
Sei dazu $k \in \{1,\ldots,m\}$. Zur Abkürzung schreiben wir bis auf weiteres $\tilde\gamma := \gamma|_{J_k}$. Offensichtlich ist die Abbildung $t \mapsto t$ auf J_k stetig differenzierbar und nach Voraussetzung ist auch $h|_{J_k} \in C^1(J_k,\mathbb{R}^n)$. Somit ist jede der $n+1$ Komponentenfunktionen von $\tilde\gamma$ stetig differenzierbar und somit ist $\tilde\gamma \in C^1(J_k,\mathbb{R}^n)$ mit

$$\tilde\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 & h_1'(t) & \ldots & h_n'(t) \end{pmatrix}^\top \quad \text{für } t \in J_k.$$

Satz 12.5 liefert, dass γ rektifizierbar ist. Außerdem liefert der Satz 12.5, dass die zugehörige Weglängenfunktion $\tilde s : J_k \to \mathbb{R};\ \tilde s(t) = L(\tilde\gamma|_{[t_{k-1},t]})$ gegeben ist durch

$$\tilde s(t) = \int_{t_{k-1}}^t \|\tilde\gamma'(\sigma)\| \,\mathrm{d}\sigma = \int_{t_{k-1}}^t \left(1 + (h_1'(\sigma))^2 + \ldots + (h_n'(\sigma))^2\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}\sigma = \int_{t_{k-1}}^t \sqrt{1 + \|h'(\sigma)\|^2}\,\mathrm{d}\sigma.$$

Sei nun $t \in (a,b]$ beliebig und sei $l \in \{1,\ldots,m\}$ so, dass $t \in (t_{l-1}, t_l]$. Für den ganzen Weg γ erhalten wir zusammen mit der obigen Gleichung für $s(t)$, dass

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{j=1}^{l-1} L(\gamma|_{J_j}) + \int_{t_{l-1}}^t \sqrt{1 + \|h'(\sigma)\|^2}\,\mathrm{d}\sigma. \\ &= \sum_{j=1}^{l-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \sqrt{1 + \|h'(\sigma)\|^2}\,\mathrm{d}\sigma + \int_{t_{l-1}}^t \sqrt{1 + \|h'(\sigma)\|^2}\,\mathrm{d}\sigma. \end{aligned}$$

Ignorieren wir die linksseitige Ableitungen (der Komponenten) von h in den Punkten t_j, dann erhalten wir eine stückweise stetige Abbildung $h' : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ die als solche Riemann-integrierbar ist. Wir können nun schreiben

$$s(t) = \int_a^t \left(1 + \|h'(\sigma)\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}\sigma.$$

Aufgabe 28 (a) Zeigen Sie: Ein Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann rektifizierbar, wenn sein inverser Weg γ^- rektifizierbar ist. In diesem Fall gilt $L(\gamma) = L(\gamma^-)$.

(b) Seien $m,n \in \mathbb{N}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ ein Weg und $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz-stetig. Zeigen Sie: Ist der Weg γ rektifizierbar, so ist auch der Weg $\varphi \circ \gamma$ rektifizierbar, und ist $M \geq 0$ eine Lipschitz-Konstante von φ, dann gilt

$$L(\varphi \circ \gamma) \leq M\, L(\gamma).$$

Lösung zu Aufgabe 28 (a) Wir nehmen zunächst an, dass γ rektifizierbar ist. Sei $Z = \{t_0, \ldots, t_m\}$ eine beliebige Zerlegung von $[a, b]$. Wir setzen $\tau_j := b + a - t_{m-j}$ für alle $j \in \{0, \ldots, m\}$. Dann gilt $a = \tau_0 < \tau_j < \tau_{j+1} < \tau_m = b$ für alle $j \in \{1, \ldots, m-1\}$. Somit ist $Z' := \{\tau_0, \ldots, \tau_m\}$ ebenfalls eine Zerlegung von $[a, b]$. Nach Definition von γ^- gilt

$$\begin{aligned} L(\gamma^-, Z) &= \sum_{j=1}^{m} \|\gamma^-(t_j) - \gamma^-(t_{j-1})\| = \sum_{j=1}^{m} \|\gamma(a+b-t_j) - \gamma(a+b-t_{j-1})\| \\ &= \sum_{j=1}^{m} \|\gamma(\tau_{m-j}) - \gamma(\tau_{m-j+1})\| \end{aligned}$$

Indem wir (mittels $k = m + 1 - j$) die Reihenfolge der Summation umdrehen erhalten wir weiter

$$\begin{aligned} L(\gamma^-, Z) &= \sum_{j=1}^{m} \|\gamma(\tau_{m-j}) - \gamma(\tau_{m-j+1})\| = \sum_{k=1}^{m} \|\gamma(\tau_{k-1}) - \gamma(\tau_k)\| \\ &= \sum_{k=1}^{m} \|\gamma(\tau_k) - \gamma(\tau_{k-1})\| = L(\gamma, Z') \le L(\gamma). \end{aligned}$$

Das zeigt, dass $\sup\{L(\gamma^-, Z) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a, b]\} \le L(\gamma)$. Damit ist γ^- rektifizierbar und es gilt $L(\gamma^-) \le L(\gamma)$.
Für die umgekehrte Richtung verwenden wir, dass $(\gamma^-)^- = \gamma$. Ist also γ^- rektifizierbar, dann ist auch γ rektifitierbar und wir haben die Abschätzung $L(\gamma) = L\big((\gamma^-)^-\big) \le L(\gamma^-)$. Insgesamt haben wir nun $L(\gamma) = L(\gamma^-)$.

(b) Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ ein rektifizierbarer Weg ung sei $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz-stetig. Da γ und φ stetig sind, ist auch $\varphi \circ \gamma$ stetig und damit ein Weg. Sei $M \ge 0$ eine Lipschitz-Konstante von φ, d.h. es gilt $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \le M\|x - y\|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$. Für jede Zerlegung $Z = \{t_0, \ldots, t_r\}$ von I gilt:

$$L(\varphi \circ \gamma, Z) = \sum_{j=1}^{r} \|\varphi(\gamma(t_j)) - \varphi(\gamma(t_{j-1}))\| \le \sum_{j=1}^{r} M\|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| = M\, L(\varphi, Z) \le M\, L(\varphi).$$

Da diese Abschätzung für jede Zerlegung Z von I gilt, ist $\varphi \circ \gamma$ rektifizierbar mit $L(\varphi \circ \gamma) \le M\, L(\gamma)$.