KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE 29.06.2017
Fakultät für Mathematik
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Lars Machinek

Lösungsvorschlag zum 8. Übungsblatt

Analysis II im SS17

Aufgabe 29 (K) (a) Zeigen Sie für die folgenden Wege γ jeweils dass sie glatt sind und bestimmen Sie die Parameterdarstellung mit der Weglänge als Parameter.

$$(1)\ \gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3;\ \gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t), \qquad (2)\ \gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2;\ \gamma(t) = \mathrm{e}^{t/10}(\cos(t), \sin(t)).$$

(b) Geben Sie drei paarweise nicht äquivalente Wege an, die alle den selben Bogen parametrisieren. Beweisen Sie für zwei der von Ihnen angegebenen Wege, dass Sie nicht äquivalent sind.

(c) Zeigen Sie, dass der Weg $\gamma_1 : [0, 2] \to \mathbb{R}$; $\gamma_1(t) = 2t$ glatt ist. Zeigen Sie weiter, dass der Weg

$$\gamma_2 : [0, 2] \to \mathbb{R};\ \gamma_2(t) = \begin{cases} t, & t \in [0, 1) \\ 3t - 2, & t \in [1, 2] \end{cases}$$

nicht glatt ist, aber den gleichen Bogen parametrisiert wie γ_1.

Lösung zu Aufgabe 29 (a) Als Komposition stetig partiell differenzierbarer Funktionen sind beide Wege in diesem Aufgabenteil stetig partiell differenzierbar.
(1) Es gilt $\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$ für alle $t \in [0, 2\pi]$. Damit erhalten wir

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + 1} = \sqrt{2} > 0 \quad \text{für alle } t \in [0, 2\pi].$$

Das zeigt, dass γ glatt ist. Nach Satz 12.5 ist die zu γ gehörige Weglängenfunktion $s : [0, 2\pi] \to [0, 2\sqrt{2}\pi]$ gegeben durch

$$s(t) = \int_0^t \|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_0^t \sqrt{2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}t$$

Es ist offensichtlich, dass $s^{-1} : [0, 2\sqrt{2}\pi] \to [0, 2\pi]$; $s^{-1}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}}\tau$ die Umkehrfunktion von s ist. Die Parameterisierung nach der Weglänge $\widehat{\gamma} : [0, 2\sqrt{2}\pi] \to \mathbb{R}^3$ ist sich definiert durch

$$\widehat{\gamma}(\tau) = \gamma(s^{-1}(\tau)) = \big(\cos\big(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\tau\big), \sin\big(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\tau\big), \tfrac{1}{\sqrt{2}}\tau\big)$$

(2) Die Ableitung von γ ist gegeben durch $\gamma'(t) = \exp(\frac{t}{10})\big(\frac{1}{10}\cos(t) - \sin(t), \frac{1}{10}\sin(t) + \cos(t)\big)$ für alle $t \in [-1, 1]$. Hieraus ergibt sich, dass

$$\begin{aligned}\|\gamma'(t)\| &= \exp(\tfrac{t}{10})\sqrt{\tfrac{1}{100}\cos^2(t) - \tfrac{1}{5}\sin(t)\cos(t) + \sin^2(t) + \tfrac{1}{100}\sin^2(t) + \tfrac{1}{5}\sin(t)\cos(t) + \cos^2(t)} \\ &= \exp(\tfrac{t}{10})\sqrt{\tfrac{1}{100} + 1} = \tfrac{\sqrt{101}}{10}\exp(\tfrac{t}{10}) > 0\end{aligned}$$

für jedes $t \in [-1, 1]$. Es folgt, dass γ glatt ist. Für die Weglängenfunktion $s : [-1, 1] \to [0, \infty)$ gilt

$$s(t) = \sqrt{101}\int_{-1}^t \tfrac{1}{10}\exp(\tfrac{\sigma}{10})\mathrm{d}\sigma = \sqrt{101}\big(\exp(\tfrac{t}{10}) - \exp(-\tfrac{1}{10})\big) \quad \text{für } t \in [-1, 1].$$

Da $s'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0$ für alle $t \in [-1,1]$, ist $s : [-1,1] \to s([-1,1])$ strikt wachsend und damit auch invertierbar. Die Rechnung

$$\begin{aligned}\tau = s(t) = \sqrt{101}\big(\exp(\tfrac{t}{10}) - \exp(-\tfrac{1}{10})\big) \quad &\iff \quad \exp(\tfrac{t}{10}) = \tfrac{1}{\sqrt{101}}\big(\tau + \sqrt{101}\exp(-\tfrac{1}{10})\big)\\ &\iff \quad t = 10\log\left(\frac{\tau + \sqrt{101}\exp(-\frac{1}{10})}{\sqrt{101}}\right)\end{aligned}$$

zeigt, dass die Umkehrfunktion $s^{-1} : [0, \sqrt{101}(\mathrm{e}^{1/10} - \mathrm{e}^{-1/10})] \to [-1,1]$ von s gegeben ist durch

$$s^{-1}(\tau) = 10\log\left(\frac{\tau + \sqrt{101}\exp(-\frac{1}{10})}{\sqrt{101}}\right)$$

Wir schreiben $a := \sqrt{101}\exp(-\frac{1}{10})$ und $b := \sqrt{101}$. Dann haben wir

$$\widehat{\gamma}(\tau) = \gamma(s^{-1}(\tau)) = \tfrac{\tau+a}{b}\Big(\cos\big(10\log\big(\tfrac{\tau+a}{b}\big)\big), \sin\big(10\log\big(\tfrac{\tau+a}{b}\big)\big)\Big)$$

für die Parameterisierung nach der Weglänge $\widehat{\gamma} : [0, \sqrt{101}(\mathrm{e}^{1/10} - \mathrm{e}^{-1/10})] \to \mathbb{R}^2$.

(b) Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ ein beliebiger, nicht konstanter Weg wie zum Beispiel $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$; $\gamma(t) = v + t(w-v)$ für zwei verschiedene Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^2$. Beachte, dass $L(\gamma) > 0$. Die Wege γ, γ^- und $\widetilde{\gamma}$ sind paarweise nicht äquivalent wobei $\widetilde{\gamma} : [a, 2b-a] \to \mathbb{R}^n$ gegeben sei durch

$$\widetilde{\gamma}(t) = \begin{cases}\gamma(t), & t \in [a,b]\\ \gamma^-(t-b), & t \in (b, 2b-a].\end{cases}$$

In dem konkreteren Beispiel ist das $\widetilde{\gamma} : [0,2] \to \mathbb{R}^2$ mit $\widetilde{\gamma}(t) = v + t(w-v)$ für alle $t \in [0,1]$ und $\widetilde{\gamma}(t) = w + (t-1)(v-w)$ für $t \in (1,2]$. Es ist bekannt, dass γ und γ^- den selben Bogen parametrisieren. Weil per Definition $\widetilde{\gamma}$ die gleichen Werte annimmt wie γ und γ^-, ist auch der Bogen von $\widetilde{\gamma}$ identisch mit dem von γ. Beachte, dass $\widetilde{\gamma}$ eine Aneinanderhängung von γ und γ^- ist. Somit haben wir $L(\widetilde{\gamma}) = L(\gamma) + L(\gamma^-) > L(\gamma^-)$. Nach Satz 12.7 (1) können $\widetilde{\gamma}$ und γ^- nicht äquivalent sein.

(c) Es ist klar, dass γ_1 stetig differenzierbar ist mit $\gamma_1'(t) = 2 \neq 0$ für alle $t \in [0,2]$. Das bedeutet, dass γ_1 glatt ist. Der Bogen von γ_1 ist offenbar das Intervall $[0,4]$.
Auf der anderen Seite ist γ_2 nicht differenzierbar im Punkt $t = 1$, denn die linksseitige Ableitung $\lim_{\delta\to 0^-} \frac{1}{\delta}(\gamma_2(1+\delta) - \gamma_2(1)) = 1$ und die rechtsseitige Ableitung $\lim_{\delta\to 0^+} \frac{1}{\delta}(\gamma_2(1+\delta) - \gamma_2(1)) = 3$ stimmen nicht überein. Nichts desto trotz gilt $\gamma_1(t) = \gamma_2(h(t))$ für alle $t \in [0,2]$ mit der strikt wachsenden stetigen Funktion

$$h : [0,2] \to [0,2]; \quad h(t) = \begin{cases}2t, & t \in [0, \frac{1}{2})\\ \frac{2}{3}(t+1), & t \in [\frac{1}{2}, 2].\end{cases}$$

Also sind γ_1 und γ_2 äquivalent und insbesondere sind die zugehörigen Bögen identisch.

Aufgabe 30 (K) Berechnen Sie für die angegeben Funktionen f, γ jeweils das Wegintegral $\int_\gamma f(x)\cdot \mathrm{d}x$ längs des Weges γ.

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $f(x,y) = (\mathrm{e}^x, xy)$, $\quad\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$; $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$,

(b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; $f(x,y,z) = (y, -z, x)$, $\quad\gamma : [0, \log(2)] \to \mathbb{R}^3$; $\gamma(t) = (\sinh(t), \cosh(t), \sinh(t))$,

(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $f(x,y) = (x^2 y, -y)$, $\quad\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$; $\gamma(t) = (t^2, t^3 - 1)$,

(d) $f : D \to \mathbb{R}^2$; $f(x,y) = \left(x^{42}y^{41}, \dfrac{-1}{1+xy^2}\right)$, $\quad\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$; $\gamma(t) = (\mathrm{e}^t, \mathrm{e}^{-t})$.

In Aufgabenteil (d) ist $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$.

Lösung zu Aufgabe 30 Die Funktionen f in dieser Aufgabe sind alle stetig, da ihre Komponenten durch stetige Funktionen gegeben sind. Auch sieht man leicht, dass die Wege γ alle stetig partiell differenzierbar sind.

(a) Die Ableitung von γ ist gegeben durch

$$\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t)) \quad \text{für alle } t \in [0, 2\pi].$$

Wir berechnen also, dass

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(x) \cdot \mathrm{d}x &= \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\cos(t)}(-\sin(t)) + \cos(t)\sin(t)\cos(t) \, \mathrm{d}t \\ &= \Big[\mathrm{e}^{\cos(t)} - \tfrac{1}{3}\cos^3(t)\Big]_0^{2\pi} = (\mathrm{e} - \tfrac{1}{3}) - (\mathrm{e} - \tfrac{1}{3}) = 0.\end{aligned}$$

(b) Die Ableitung von γ ist gegeben durch

$$\gamma'(t) = (\cosh(t), \sinh(t), \cosh(t)) \quad \text{für alle } t \in [0, \log(2)].$$

Also gilt

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(x) \cdot \mathrm{d}x &= \int_0^{\log(2)} \big(\cosh^2(t) - \sinh^2(t) + \sinh(t)\cosh(t)\big) \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\log(2)} (1 + \sinh(t)\cosh(t)) \, \mathrm{d}t = \log(2) + \big[\tfrac{1}{2}\cosh^2(t)\big]_0^{\log(2)} \\ &= \log(2) + \tfrac{1}{2}\big[\cosh^2(\log(2)) - \cosh^2(0)\big] = \log(2) + \tfrac{1}{2}\big[\tfrac{1}{4}\tfrac{25}{4} - 1\big] = \log(2) + \tfrac{9}{32}\end{aligned}$$

Dabei haben wir am Ende verwendet, dass $\cosh(\log(2)) = \frac{1}{2}(\exp(\log(2)) + \exp(-\log(2)) = \frac{1}{2}(2 + \frac{1}{2})$.

(c) Die Ableitung von γ ist gegeben durch

$$\gamma'(t) = (2t, 3t^2) \quad \text{für alle } t \in [0, 1].$$

Also gilt

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(x) \cdot \mathrm{d}x &= \int_0^1 (t^4(t^3 - 1)2t - (t^3 - 1)3t^2) \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (2t^8 - 5t^5 + 3t^2) \, \mathrm{d}t = \big[\tfrac{2}{9}t^9 - \tfrac{5}{6}t^6 + t^3\big]_0^1 = \tfrac{7}{18}\end{aligned}$$

(d) Hier ist zuerst zu zeigen, dass $\gamma(t) = (\mathrm{e}^t, \mathrm{e}^{-t}) \in D$ für alle $t \in [0, 1]$. Das ist der Fall, denn $\mathrm{e}^t > 0$ für jedes $t \in \mathbb{R}$. Die Ableitung von γ ist gegeben durch

$$\gamma'(t) = (\mathrm{e}^t, -\mathrm{e}^{-t}) \quad \text{für alle } t \in [0, 1].$$

Weiter gilt $f(\gamma(t)) = \big(\mathrm{e}^{42t}\mathrm{e}^{-41t}, -(1 + \mathrm{e}^t\mathrm{e}^{-2t})^{-1}\big) = (\mathrm{e}^t, -(1 + \mathrm{e}^{-t})^{-1})$ für $t \in [0, 1]$. Also haben wir

$$\int_\gamma f(x) \cdot \mathrm{d}x = \int_0^t \mathrm{e}^t\mathrm{e}^t + \frac{-1}{1 + \mathrm{e}^{-t}}(-\mathrm{e}^{-t}) \, \mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-t}}\mathrm{e}^{-t}\right) \, \mathrm{d}t = \big[\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}\big]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-t}}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

Im Integral auf der rechten Seite substituieren wir $u = \mathrm{e}^{-t}$ (dann ist "$\mathrm{d}u = -\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$"):

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(x) \cdot \mathrm{d}x &= \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^2 - 1) + \int_1^{\mathrm{e}^{-1}} (-1)\frac{1}{1 + u}\mathrm{d}u = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \tfrac{1}{2} + [\log(1 + u)]_{\mathrm{e}^{-1}}^1 \\ &= \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \tfrac{1}{2} + \log(2) - \log(\tfrac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}}) = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^2 + \log(\tfrac{2}{\mathrm{e}+1}) + \tfrac{1}{2}.\end{aligned}$$

Aufgabe 31 Sei $\gamma \in C^2([a, b], \mathbb{R}^n)$ ein glatter Weg. Wir setzen $l := L(\gamma)$ und bezeichnen $s : [a, b] \to [0, l]$ die Weglängenfunktion von γ und mit $\widehat{\gamma} : [0, l] \to \mathbb{R}^n$ die Parameterdarstellung nach der Weglänge.

(a) Zeigen Sie, dass auch $\widehat{\gamma}$ zweimal differenzierbar ist und dass die zweite Ableitung gegeben ist durch

$$\widehat{\gamma}''(s(t)) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|^2}\gamma''(t) - \frac{1}{\|\gamma'(t)\|^4}\big(\gamma'(t)\cdot\gamma''(t)\big)\,\gamma'(t) \quad \text{für alle } t \in [a,b].$$

(b) Weisen Sie nach, dass für jedes $\tau \in (0,l)$ die Vektoren $\widehat{\gamma}'(\tau)$ und $\widehat{\gamma}''(\tau)$ orthogonal sind.

Lösung zu Aufgabe 31 (a) Nach Satz 12.5 ist die Weglängenfunktion s differenzierbar mit $s'(t) = \|\gamma'(t)\|$ für $t \in [a,b]$. Weil γ glatt ist, also $\|\gamma'(t)\| > 0$ für alle $t \in [a,b]$, ist s strikt wachsend und die Umkehrabbildung $s^{-1} : [0,l] \to [a,b]$ ist differenzierbar mit

$$(s^{-1})'(s(t)) = (s'(t))^{-1} = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \text{ für } t \in [a,b] \quad \text{bzw.} \quad (s^{-1})'(\tau) = \frac{1}{\|\gamma'(s^{-1}(\tau))\|} \text{ für } \tau \in [0,l].$$

Es folgt, dass $\widehat{\gamma}$ differenzierbar ist mit

$$\widehat{\gamma}'(\tau) = \gamma'(s^{-1}(\tau))(s^{-1})'(\tau) = \frac{1}{\|\gamma'(s^{-1}(\tau))\|}\gamma'(s^{-1}(\tau))$$

Auch das ist aus der Vorlesung bekannt.
Wir wissen auch, dass die Abbildung $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R};\ x \mapsto \|x\|$ differenzierbar ist. Die Ableitung an der Stelle $\xi \in \mathbb{R}^n$ ist $\|\xi\|^{-1}\xi$. Per Annahme ist $\gamma'(t) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ für alle $t \in [a,b]$. Die Quotientenregel und die Kettenregel liefern also, dass s^{-1} zweimal differenzierbar ist mit

$$\begin{aligned}
(s^{-1})''(\tau) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left[\frac{1}{\|\gamma'(s^{-1}(\tau))\|}\right] = \frac{-1}{\|\gamma'(s^{-1}(\tau))\|^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left[\|\gamma'(s^{-1}(\tau))\|\right] \\
&= \frac{-1}{\|\gamma'(s^{-1}(\tau))\|^2}\frac{1}{\|\gamma'(s^{-1}(\tau))\|}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left[\gamma'(s^{-1}(\tau))\right] \\
&= \frac{-1}{\|\gamma'(s^{-1}(\tau))\|^3}\gamma'(s^{-1}(\tau))\cdot\gamma''(s^{-1}(\tau))(s^{-1})'(\tau) = \frac{-1}{\|\gamma'(s^{-1}(\tau))\|^4}\gamma'(s^{-1}(\tau))\cdot\gamma''(s^{-1}(\tau))
\end{aligned}$$

Nun sehen wir mit der Produktregel (angewendet auf die Komponentenfunktionen von $\widehat{\gamma}'$), dass

$$\begin{aligned}
\widehat{\gamma}''(\tau) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left[\gamma'(s^{-1}(\tau))(s^{-1})'(\tau)\right] = \gamma''(s^{-1}(\tau))\big((s^{-1})'(\tau)\big)^2 + \gamma'(s^{-1}(\tau))(s^{-1})''(\tau) \\
&= \frac{1}{\|\gamma'(s^{-1}(\tau))\|^2}\gamma''(s^{-1}(\tau)) - \frac{1}{\|\gamma'(s^{-1}(\tau))\|^4}\big(\gamma'(s^{-1}(\tau))\cdot\gamma''(s^{-1}(\tau))\big)\,\gamma'(s^{-1}(\tau))
\end{aligned}$$

für jedes $\tau \in [0,l]$. Für $t \in [a,b]$ folgt wie behauptet, dass

$$\widehat{\gamma}''(s(t)) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|^2}\gamma''(t) - \frac{1}{\|\gamma'(t)\|^4}\big(\gamma'(t)\cdot\gamma''(t)\big)\,\gamma'(t)$$

(b) Die Behauptung erhalten wir leicht aus den obigen Identitäten Wegen der Bilinearität des Skalarprodukts gilt für alle $\tau \in [0,l]$ und das zugehörige $t \in [a,b]$ mit $\tau = s(t)$ nämlich

$$\begin{aligned}
\widehat{\gamma}''(\tau)\cdot\widehat{\gamma}'(\tau) &= \left(\frac{1}{\|\gamma'(t)\|^2}\gamma''(t)\right)\cdot\left(\frac{1}{\|\gamma'(t)\|}\gamma'(t)\right) - \left(\frac{1}{\|\gamma'(t)\|^4}\big(\gamma'(t)\cdot\gamma''(t)\big)\,\gamma'(t)\right)\cdot\left(\frac{1}{\|\gamma'(t)\|}\gamma'(t)\right) \\
&= \frac{1}{\|\gamma'(t)\|^3}\big(\gamma''(t)\cdot\gamma'(t)\big) - \frac{1}{\|\gamma'(t)\|^5}\big(\gamma'(t)\cdot\gamma'(t)\big)\big(\gamma'(t)\cdot\gamma''(t)\big) = 0
\end{aligned}$$

Der folgende alternative Beweis ist übersichtlicher: Es gilt $\|\widehat{\gamma}'(\tau)\| = 1$ für alle $\tau \in [0,l]$. Also ist die Abbildung $[0,l] \to \mathbb{R};\ \tau \mapsto \|\widehat{\gamma}'(\tau)\|^2$ konstant und somit ihre Ableitung Null. Mit der Kettenregel berechnen wir, dass

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left[\|\widehat{\gamma}'(\tau)\|^2\right] = 2\big(\widehat{\gamma}'(\tau)\cdot\widehat{\gamma}''(\tau)\big) \quad \text{für alle } \tau \in [0,l].$$

Aufgabe 32 Berechnen Sie für die angegebenen Abbildungen g und γ jeweils $\int_\gamma g(v)\,\mathrm{d}s$ das Wegintegral bezüglich der Weglänge.

(a) $g : [-r,r]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R};\ g(x,y) = \arccos\left(\frac{x}{r}\right) + \frac{y}{r}$, $\quad \gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2;\ \gamma(t) = (r\cos(t), r\sin(t))$,

(b) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R};\ g(x,y,z) = x$, $\quad \gamma : [0,\log(5)] \to \mathbb{R}^3;\ \gamma(t) = \frac{\mathrm{e}^t}{2}(\cos(t), \sin(t), \sqrt{2})$.

In Teil (a) sei hierbei $r > 0$.

Lösung zu Aufgabe 32 (a) Es ist klar, dass g stetig ist und dass γ stetig differenzierbar ist. Wegen $|r\cos(t)| = r|\cos(t)| \leq r$ gilt $\gamma(t) \in [-r, r] \times \mathbb{R}$ für alle $t \in [0, \pi]$. Wir berechnen leicht, dass $\gamma'(t) = r(-\sin(t), \cos(t))$ und damit $\|\gamma'(t)\| = r\sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} = r > 0$ für alle $t \in [0, \pi]$. Insbesondere ist γ glatt und das Wegintegral existiert. Es gilt

$$\int_\gamma g(v)\,\mathrm{d}s = \int_0^\pi (\arccos(\cos(t)) + \sin(t))r\,\mathrm{d}t = r\int_0^\pi t + \sin(t)\,\mathrm{d}t = r\left[\tfrac{1}{2}t^2 - \cos(t)\right]_0^\pi = \tfrac{\pi^2 r}{2} + 2r$$

(b) Es ist klar, dass g stetig ist und dass γ stetig differenzierbar ist. Für alle $t \in [0, \log(5)]$ gilt

$$\gamma'(t) = \tfrac{\mathrm{e}^t}{2}\big(\cos(t) - \sin(t), \sin(t) + \cos(t), \sqrt{2}\big)$$

und somit

$$\|\gamma'(t)\| = \tfrac{\mathrm{e}^t}{2}\sqrt{(\cos(t) - \sin(t))^2 + (\sin(t) + \cos(t))^2 + 2} = \tfrac{\mathrm{e}^t}{2}\sqrt{2+2} = \mathrm{e}^t$$

Es folgt, dass

$$\int_\gamma g(v)\,\mathrm{d}s = \int_0^{\log(5)} \tfrac{\mathrm{e}^t}{2}\cos(t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\log(5)} \tfrac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\cos(t)\mathrm{d}t.$$

Zweimalige partielle Integration liefert, dass

$$\int_0^{\log(5)} \tfrac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\cos(t)\mathrm{d}t = -4\int_0^{\log(5)} \tfrac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\cos(t)\mathrm{d}t + 25\cos(\log(5)) - 1 + \tfrac{25}{2}\sin(\log(5))$$

und damit erhalten wir

$$\int_\gamma g(v)\,\mathrm{d}s = \tfrac{1}{5}\big(25\cos(\log(5)) + \tfrac{25}{2}\sin(\log(5)) - 1\big) = 5\cos(\log(5)) + \tfrac{5}{2}\sin(\log(5)) - \tfrac{1}{5}.$$