KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE 06.07.2017
Fakultät für Mathematik
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Lars Machinek

Lösungsvorschlag zum 9. Übungsblatt

Analysis II im SS17

Aufgabe 33 (a) Geben Sie ein Beispiel für ein Gebiet $\emptyset \neq G \subseteq \mathbb{R}^n$ an welches nicht sternförmig ist und eine Funktion $f : G \to \mathbb{R}^n$ die auf G eine Stammfunktion besitzt.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge $G = \mathbb{R}^2 \setminus \big((0,\infty) \times \{0\}\big)$ ein sternförmiges Gebiet ist.

(c) Geben Sie die Negation der Aussage „Die Menge M ist sternförmig" an und zeigen Sie, dass die Sphäre $S = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| = 5\}$ und die Menge $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$ nicht sternförmig sind.

Lösung zu Aufgabe 33 (a) Beispiele hierfür liefern Ableitungen von stetig differenzierbaren Funktionen für die der Definitionsbereich D künstlich gewählt wurde. Zum Beispiel $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\tilde{f}(x,y) = (y,x)$ eingeschränkt auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, d.h. $f = \tilde{f}|_G$. Hier ist $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$; $F(x,y) = xy$ eine Stammfunktion von f.

(b) Wir behaupten, dass für alle $v \in G$ die Verbindungsstrecke $S[0,v] = \{0 + \tau v \mid \tau \in [0,1]\}$ in G enthalten ist. Sei also $v = (x,y) \in G$.
Falls $y = 0$, dann ist $x \leq 0$. Für $\tau \in [0,1]$ ist $\tau v = (\tau x, \tau 0)$. Die erste Komponente ist nicht positiv (d.h. $\tau x \leq 0$), also $\tau v \notin (0,\infty) \times \{0\}$ und damit gilt $\tau v \in G$.
Falls $y \neq 0$, ist auch $\tau y \neq 0$ für alle $\tau \in (0,1]$. Es folgt, dass $\tau v = (\tau x, \tau y) \notin (0,\infty) \times \{0\}$ und somit $\tau v \in G$ für alle $\tau \in (0,1]$. Beachte, dass $0v = (0,0) \in G$.

(c) Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist nicht sternförmig, wenn es zu jedem $x_0 \in M$ ein $v \in M$ gibt mit $S[x_0,v] \not\subseteq M$, d.h.

$$\forall x_0 \in M \ \exists v \in M \ \exists \tau \in [0,1] : \ x_0 + \tau(v - x_0) \notin M.$$

Sei nun $x_0 \in S$. Dann ist wegen $\|-x_0\| = \|x_0\| = 5$ auch $-x_0 \in S$. Für $\tau \in (0,1)$ gilt $x_0 + \tau(-x_0 - x_0) = (1-2\tau)x_0$. Da $1 - 2\tau \in (-1,1)$ also $|1-2\tau| < 1$ folgt

$$\|x_0 + \tau(-x_0 - x_0)\| = |1-2\tau|\|x_0\| < 5,$$

sodass $x_0 + \tau(-x_0 - x_0) \notin S$ und damit $S[x_0, -x_0] \not\subseteq S$.

Sei $x_0 = (x,y) \in P$ also $y = x^2$. Falls $x = y = 0$, betrachte $(1,1) \in P$. Für $\tau \in (0,1)$ gilt $x_0 + \tau((1,1) - x_0) = (\tau,\tau) \notin P$, denn $\tau > \tau^2$.
Falls $x \neq 0$ betrachte $v = (-x,y) \neq x_0$. Da $(-x)^2 = x^2 = y$ haben wir $(-x,y) \in P$. Weiter gilt $(x,y) + \tau((-x,y) - (x,y)) = \big((1-2\tau)x, y\big)$. Wir haben oben gesehen, dass $|1-2\tau| < 1$ für $\tau \in (0,1)$ und damit

$$(1-2\tau)^2 x^2 = (1-2\tau)^2 y < y.$$

Das heißt $(x,y) + \tau((-x,y) - (x,y)) \notin P$.

Aufgabe 34 (K) Überprüfen Sie jeweils ob $f : D \to \mathbb{R}^n$ auf D eine Stammfunktion besitzt und berechnen Sie diese gegebenenfalls.

(a) $D = \mathbb{R}^2$ und $f(x,y) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^y + \cos(x)\cos(y) \\ x\mathrm{e}^y - \sin(x)\sin(y) \end{pmatrix}$, (b) $D = \mathbb{R}^3$ und $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^2 + 2xyz^3 \\ 2y + x^2 z^3 \\ y^2 + 3x^2 yz^2 \end{pmatrix}$,

(c) $D = \mathbb{R}^3$ und $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^2 + 2xz \\ z^2 + 2xy \\ x^2 + 2yz \end{pmatrix}$, (d) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0 \text{ und } \|(x,y,z)\| > 5\}$ sowie $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 y \\ z\mathrm{e}^x \\ xy\log(z) \end{pmatrix}$.

Lösung zu Aufgabe 34 Jede der Funktionen f ist stetig partiell differenzierbar als Komposition stetig partiell differenzierbarer Funktionen.

(a) Es ist klar, dass $\mathbb{R}^2$ offen und konvex ist und somit ein sternförmiges Gebiet. Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gelten

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin(x)\cos(y) & \mathrm{e}^y - \cos(x)\sin(y) \\ \mathrm{e}^y - \cos(x)\sin(y) & x\mathrm{e}^y - \sin(x)\cos(y) \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist symmetrisch und damit sind die Integrabilitätsbedingungen

$$\forall j,k \in \{1,2\} : \partial_j f_k(x,y) = \partial_k f_j(x,y)$$

erfüllt. Nach Satz 14.5 hat f eine Stammfunktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^2$. Es gilt

$$\partial_1 F(x,y) = f_1(x,y) = \mathrm{e}^y + \cos(x)\cos(y) \quad \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Hieraus schließen wir, dass es es eine Funktion $g \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ gibt mit

$$F(x,y) = \int \mathrm{e}^y + \cos(x)\cos(y)\,\mathrm{d}x + g(y) = x\mathrm{e}^y + \sin(x)\cos(y) + g(y) \quad \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Mit dieser Darstellung folgt nun

$$x\mathrm{e}^y - \sin(x)\sin(y) + g'(y) = \partial_2 F(x,y) = f_2(x,y) = x\mathrm{e}^y - \sin(x)\sin(y)$$

und damit $g'(y) = 0$. Das bedeutet, dass g konstant ist. Die Stammfunktionen von f sind also von der Form $F(x,y) = x\mathrm{e}^y + \sin(x)\cos(y) + c$ wobei $c \in \mathbb{R}$.

(b) Wir zeigen, dass f die Integrabilitätsbedingungen nicht erfüllt und somit keine Stammfunktion besitzt. Für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2yz^3 & 2y + 2xz^3 & 6xyz^2 \\ 2xz^3 & 2 & 3x^2z^2 \\ 6xyz^2 & 2y + 3x^2z^2 & 6x^2yz \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist nicht symmetrisch für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, denn es ist zum Beispiel

$$f'(0,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nach Satz 14.5 besitzt f keine Stammfunktion auf $\mathbb{R}^3$.

(c) Es ist klar, dass $\mathbb{R}^3$ ein sternförmiges Gebiet ist. Weiter gilt

$$f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2z & 2y & 2x \\ 2y & 2x & 2z \\ 2x & 2z & 2y \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Wir sehen, dass $f'(x,y,z)$ symmetrisch ist für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Damit, hat f nach Satz 14.5 eine Stammfunktion $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Für $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\partial_1 F(x,y,z) = f_1(x,y,z) = y^2 + 2xz.$$

Hieraus schließen wir, dass es eine Funktion $g \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ gibt mit $F(x,y,z) = xy^2 + x^2z + g(y,z)$. Nun folgt, dass

$$2xy + \frac{\partial g}{\partial y}(y,z) = \partial_2 F(x,y,z) = f_2(x,y,z) = z^2 + 2xy.$$

und insbesondere, dass $\frac{\partial g}{\partial y}(y,z) = z^2$. Damit gibt es eine weitere Funktion $h \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit $g(y,z) = yz^2 + h(z)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Das bedeutet, dass $F(x,y,z) = xy^2 + x^2z + yz^2 + h(z)$ für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Schießlich erhalten wir mit

$$x^2 + 2yz + h'(z) = \partial_3 F(x,y,z) = f_3(x,y,z) = x^2 + 2yz,$$

dass $h'(z) = 0$, also h eine konstante Funktion ist. Jede Stammfunktion von f ist also von der Form $F(x, y, z) = xy^2 + x^2 z + yz^2 + c$ für ein $c \in \mathbb{R}$.

(d) Auch hier ist die Integrabilitätsbedingung nicht erfüllt, sodass f keine Stammfunktion besitzen kann. Es gilt nämlich zum Beispiel

$$\partial_2 f_1(0,0,1) = \big[x^2\big]_{(x,y,z)=(0,0,1)} = 0 \neq 1 = \big[z\mathrm{e}^x\big]_{(x,y,z)=(0,0,1)} = \partial_1 f_2(0,0,1).$$

Aufgabe 35 Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen sowie $f \in C([a,b] \times D, \mathbb{R})$. Wir betrachten $F : D \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x) = \int_a^b f(t,x)\,\mathrm{d}t.$$

Weiter existiere die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ und sei stetig, es gelte also $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in C([a,b] \times D, \mathbb{R})$. Zeigen Sie: F ist nach der Variable x_j differenzierbar mit Ableitung

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_j}(t,x)\,\mathrm{d}t \quad \text{für alle } x \in D.$$

Lösung zu Aufgabe 35 Da für jedes $x \in D$ die Funktion $[a,b] \to \mathbb{R};\, t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(t,x)$ stetig ist, existiert das Integral

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_j}(t,x)\,\mathrm{d}t$$

und definiert eine Abbildung $D \to \mathbb{R};\, x \mapsto \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_j}(t,x)\mathrm{d}t$. Sei nun $x_0 \in D$ beliebig aber fest. Da D offen ist, gibt es ein $r > 0$ mit $U_r(x_0) \subseteq D$. Wir zeigen, dass F in x_0 nach der Komponente x_j differenzierbar ist. Dazu müssen wir nachweisen, dass

$$\left| \tfrac{1}{h}\big(F(x_0 + he_j) - F(x_0)\big) - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_j}(t,x_0)\,\mathrm{d}t \right| \to 0 \quad \text{für } h \to 0,$$

wobei e_j der j-te Einheitsvektor sei. Das bedeutet: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall h \in (-r,r) \setminus \{0\}$:

$$|h| \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad \left| \tfrac{1}{h}\big(F(x_0 + he_j) - F(x_0)\big) - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_j}(t,x_0)\,\mathrm{d}t \right| \leq \varepsilon.$$

Beachte, dass

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{h}\big(F(x_0 + he_j) - F(x_0)\big) &= \tfrac{1}{h}\int_a^b f(t, x_0 + he_j)\,\mathrm{d}t - \tfrac{1}{h}\int_a^b f(t,x_0)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \tfrac{1}{h}\big(f(t,x_0 + he_j) - f(t,x_0)\big)\,\mathrm{d}t \qquad \text{für } h \in (-r,r) \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Für jedes $t \in [a,b]$ betrachten wir $g_t : (-r,r) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g_t(h) = f(t, x_0 + he_j)$. Nach der Kettenregel ist g_t differenzierbar mit

$$g_t'(h) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(t, x_0 + he_j) \quad \text{für } h \in (-r,r).$$

Der Mittelwertsatz lieft: $\forall t \in [a,b], h \in (-r,r) \setminus \{0\}\ \exists \xi(t,h) \in S[0,h]$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(t, x_0 + \xi(t,h)e_j) = g_t'(\xi(t,h)) = \tfrac{1}{h}(g_t(h) - g_t(0)) = \tfrac{1}{h}\big(f(t,x_0 + he_j) - f(t,x_0)\big).$$

Beachte, dass $|\xi(t,h)| \leq |h|$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Da $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ in (t,x_0) stetig ist gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass

$$\forall (s,w) \in [a,b] \times D :\ \|(s,w) - (t,x_0)\| \leq \delta \implies \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(s,w) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(t,x_0) \right| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Für $h \in (-r, r) \setminus \{0\}$ mit $|h| \leq \delta$ gilt $|\xi(t,h)| \leq \delta$ und somit

$$\|(t, x_0) - (t, x_0 + \xi(t,h)e_j)\| = |\xi(t,h)|\|e_j\| \leq \delta$$

Nach Wahl von δ folgt nun

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{h}\big(F(x_0 + he_j) - F(x_0)\big) - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_j}(t, x_0)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\qquad\qquad \leq \int_a^b \left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(t, x_0 + \xi(t,h)e_j) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(t, x_0)\right| \mathrm{d}t \leq \frac{\varepsilon}{b-a}\int_a^b 1\,\mathrm{d}t = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Aufgabe 36 (K) (a) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

(i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1+\mathrm{i})^k}$, (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n+\mathrm{i}}{n-2\mathrm{i}n}\right)^n$,

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+\mathrm{i})(n+\mathrm{i}+1)}$ (iv) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k - \mathrm{i}\sqrt{k}}$.

(b) Berechnen Sie jeweils den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen.

(i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (7k^5 + 3k^2 + 1)z^k$, (ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right)^k 3^{(-1)^k k} z^{3k}$.

Lösung zu Aufgabe 36 (a) (i) Die Reihe konvergiert, es ist eine geometrische Reihe. In der Tat ist $|1+\mathrm{i}| = \sqrt{2} > 1$, sodass $\left|\frac{1}{1+\mathrm{i}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$. Somit konvergiert die Reihe. Wir können hier auch den Reihenwert bestimmen. Es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\mathrm{i}}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{1+\mathrm{i}}} = \frac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}} = (-\mathrm{i})(1+\mathrm{i}) = 1 - \mathrm{i}.$$

(a) (ii) Wir zeigen mit Hilfe des Wurzelkriteriums, dass die Reihe divergiert. Es gilt

$$\sqrt[n]{\left|\frac{5n+\mathrm{i}}{n-2\mathrm{i}n}\right|^n} = \left|\frac{5n+\mathrm{i}}{n-2\mathrm{i}n}\right| = \left|\frac{5}{1-2\mathrm{i}} + \frac{1}{n}\frac{\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}\right|.$$

Da $\frac{5}{1-2\mathrm{i}} + \frac{1}{n}\frac{\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}} \to \frac{5}{1-2\mathrm{i}}$ für $n \to \infty$ und die Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{R};\ z \mapsto |z|$ stetig ist, folgt

$$\sqrt[n]{\left|\frac{5n+\mathrm{i}}{n-2\mathrm{i}n}\right|^n} = \left|\frac{5}{1-2\mathrm{i}} + \frac{1}{n}\frac{\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}\right| \to \left|\frac{5}{1-2\mathrm{i}}\right| = \frac{5}{|1-2\mathrm{i}|} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} > 1.$$

(a) (iii) Wir verwenden das Majorantenkriterium. Beachte, dass $|n+\mathrm{i}+1| = \sqrt{(n+1)^2 + 1^2} = \sqrt{n^2 + 2n + 2}$. Da $2n \geq 0$ und $2 \geq 0$, folgt $|n + \mathrm{i} + 1| \geq \sqrt{n^2} = |n| = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Analog erhalten wir $|n + \mathrm{i}| \geq n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Hieraus schließen wir, dass

$$\left|\frac{1}{(n+\mathrm{i})(n+\mathrm{i}+1)}\right| = \frac{1}{|n+\mathrm{i}|\,|n+\mathrm{i}+1|} \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Weil die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+\mathrm{i})(n+\mathrm{i}+1)}$.

(a) (iv) Die Reihe konvergiert nicht, denn schon die Reihe über die Realteile der Glieder divergiert: Sei $k \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\frac{1}{k - \mathrm{i}\sqrt{k}} = \frac{k + \mathrm{i}\sqrt{k}}{(k + \mathrm{i}\sqrt{k})(k - \mathrm{i}\sqrt{k})} = \frac{k + \mathrm{i}\sqrt{k}}{k^2 - \mathrm{i}^2\sqrt{k}^2} = \frac{k}{k^2 + k} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{k}}{k^2 + k}.$$

Wir sehen, dass
$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{k-\mathrm{i}\sqrt{k}}\right)=\frac{k}{k^2+k}.$$
Da $k\le k^2$ und damit $\frac{k}{k^2+k}\ge\frac{k}{2k^2}=\frac{1}{2k}$ und die Reihe $\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{2k}$ divergiert, divergiert auch die Reihe
$$\sum_{k=1}^\infty\mathrm{Re}\left(\frac{1}{k-\mathrm{i}\sqrt{k}}\right)\qquad\text{und damit auch}\qquad\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k-\mathrm{i}\sqrt{k}}.$$

(b) (i) Für alle $k\in\mathbb{N}$ gilt $|7k^5+3k^2+1|=7k^5+3k^2+1$ und
$$1=\sqrt[k]{1}\le\sqrt[k]{|7k^5+3k^2+1|}\le\sqrt[k]{11}\,\sqrt[k]{k}^5.$$
Die rechte Seite konvergiert gegen 1. Mit dem Einschließungskriterium folgt die Konvergenz des mittleren Terms gegen 1 und damit ist $r=1$ der Konvergenzradius der Potenzreihe.

(b) (ii) Wir setzen $w=z^3$. Für $k\ge1$ gilt
$$\sqrt[k]{\left|\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right|^k3^{(-1)^kk}}=\frac{|1+\mathrm{i}|}{2}3^{(-1)^k}=\frac{1}{\sqrt{2}}3^{(-1)^k}.$$
Die Häufungswerte dieser Folge sind $\frac{3}{\sqrt{2}}$ und $\frac{1}{3\sqrt{2}}$. Da $\frac{3}{\sqrt{2}}>\frac{1}{3\sqrt{2}}$ ist $r_0=\frac{1}{\frac{3}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$ der Konvergenzradius der Potenzreihe
$$\sum_{k=0}^\infty\left(\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right)^k3^{(-1)^kk}w^k.$$
Außerdem haben wir
$$|w|=|z^3|=|z|^3<\frac{\sqrt{2}}{3}\quad\Longleftrightarrow\quad|z|<\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{3}}.$$
Damit ist $r=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{3}}$ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^\infty\left(\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right)^k3^{(-1)^kk}z^{3k}$.