KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
Institut für Analysis
Lars Machinek

09.06.2017

Analysis II
SS 17

Ergänzung zur 7. Übung

Unten findet ihr die ausführliche Lösung der Aufgabe 3 aus der Übung. Zuerst die angesprochene Aussage über den Abstand von zwei Mengen.

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleere Mengen. Die Menge $\{\|x - w\| \mid x \in A, w \in B\} \subseteq \mathbb{R}$ nach unten durch 0 beschränkt. Somit existiert

$$\mathrm{d}(A, B) := \inf\{\|x - w\| \mid x \in A, w \in B\}.$$

Die Zahl $\mathrm{d}(A, B)$ gibt den *Abstand von A und B* an.

Lemma. *Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und $\emptyset \neq B \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen. Dann gibt es ein $x_0 \in A$ und ein $w_0 \in B$ mit $\|x_0 - w_0\| = \mathrm{d}(A, B)$.*

Insbesondere ist unter den Voraussetzungen des Lemmas das Infimum oben ein Minimum.

Der Beweis ist zum Beispiel unter Satz 174.2 im *Lehrbuch Analysis Teil 2* (13. Auflage) von Harro Heuser zu finden.

Aufgabe 3: Seien $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 = 6\}$ und $B = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u + v = 5\}$. Bestimme den Abstand $\mathrm{d}(A, B)$ von A und B.

Lösung: Leicht zu sehen: A und B sind abg. (sind Urbilder von stetigen Funktionen ...). Weiter ist A beschr., denn für alle $(x, y) \in A$ gilt

$$x^2 + y^2 \leq x^2 + y^2 + \underbrace{y^2}_{\geq 0} = 6 \quad \Longrightarrow \quad \|(x, y)\| \leq \sqrt{6}.$$

Wende Multipl.-Regel von Lagrange an auf

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}; & f(x, y, u, v) &= (x - u)^2 + (y - v)^2, \\ \varphi &: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2; & \varphi(x, y, u, v) &= \begin{pmatrix} x^2 + 2y^2 - 6 \\ u + v - 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es ist klar, dass $f \in C^1(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ und $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^2)$. Zur Abk. setze

$$T := \{(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4 \mid \varphi(x, y, u, v) = 0\}.$$

Das Lemma oben garantiert, dass $f|_T$ sein Min. annimmt. D.h. es exist $(x_0, y_0, u_0, v_0) \in T$ mit

$$f(x_0, y_0, u_0, v_0) = \min_{\dots \in T} f(x, y, u, v) = \big(\mathrm{d}(A, B)\big)^2.$$

2) Für $(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4$ gilt

$$\varphi'(x, y, u, v) = \begin{pmatrix} 2x & 4y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir sehen, dass $\operatorname{Rang}\varphi'(x,y,u,v) \geq 1$ und, dass

$$\operatorname{Rang}\varphi'(x,y,u,v) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = y = 0.$$

Jedoch ist $\varphi(0,0,u,v) = (-6, u+v+5) \neq (0,0)$ und somit gilt

$$\operatorname{Rang}\varphi'(x,y,u,v) = 2 \quad \text{für alle } (x,y,u,v) \in T.$$

3) Bestimme alle Lösungen von

$$\begin{aligned} \text{(I)}\ 0 &= 2(x-u) + \lambda 2x, \\ \text{(II)}\ 0 &= 2(y-v) + \lambda 4y, \\ \text{(III)}\ 0 &= -2(x-u) + \mu, \\ \text{(IV)}\ 0 &= -2(y-v) + \mu. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \text{(A)}\ & x^2 + 2y^2 = 6, \\ \text{(B)}\ & u = 5 - v, \end{aligned}$$

Wir addieren (I) und (III) sowie (II) und (IV), wir erhalten

$$\left.\begin{aligned} \text{(I)} + \text{(III)}:\ 2x\lambda &= -\mu \\ \text{(II)} + \text{(IV)}:\ 4y\lambda &= -\mu \end{aligned}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \lambda(x-2y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 0 \text{ oder } x = 2y$$

Ang. es wäre $\lambda = 0$. Dann folgt mit (I) bzw. (II), dass $x = u$ und $y = v$. Mit (B) schließen wir

$$x = 5 - v = 5 - y.$$

Eingesetzen in (A) liefert

$$\begin{aligned} 0 = (5-y)^2 + 2y^2 - 6 = 19 - 10y + y^2 + 2y^2 &= \left(3y^2 - 2\sqrt{3}\tfrac{5}{\sqrt{3}}y + \tfrac{25}{3}\right) - \tfrac{25}{3} + \tfrac{3\cdot 19}{3} \\ &= \left(\sqrt{3}y - \tfrac{5}{\sqrt{3}}\right)^2 + \tfrac{32}{3} \geq \tfrac{32}{3} > 0. \end{aligned}$$

Ein Widerspruch.

Also ist $\lambda \neq 0$ und $x = 2y$. Mit (A) folgt, dass

$$4y^2 + 2y^2 = 6 \quad \Longleftrightarrow \quad y^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad y = 1 \text{ oder } y = -1.$$

Setze jetzt $x = 2y$ sowie $u = 5 - v$ [das ist (B)] in (III) und (IV) ein und subtrahiere diese Gleichungen:

$$\text{(IV)} - \text{(III)}:\ 4y - 2(5-v) - 2y + 2v = 0 \quad \Longrightarrow \quad v = \tfrac{1}{2}(5-y).$$

Somit besitzt das System (I) – (IV), (A), (B) genau die zwei Lösungen

$$(x,y,u,v) = (2,1,3,2), \quad (x,y,u,v) = (-2,-1,2,3)$$

In einem dieser beiden Punkte nimmt $f|_T$ sein Minimum an. Wir vergleichen also

$$f(2,1,3,2) = 2 \quad \text{und} \quad f(-2,-1,2,3) = 32$$

und sehen, dass $\mathrm{d}(A,B) = \sqrt{f(2,1,3,2)} = \sqrt{2}$.