Karlsruher Institut für Technologie

29. Mai 2019
Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Andreas Geyer-Schulz

Analysis für das Lehramt
6. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Anwendung des Residuensatzes)
Berechne die folgenden Integrale mit dem Residuensatz.

a) $\displaystyle\int_{\partial B(0,2)} \frac{\mathrm{e}^z}{(z-1)(z+3)^2}\,\mathrm{d}z$

b) $\displaystyle\int_{\partial B(0,9)} \frac{\mathrm{e}^z}{(z-1)(z+3)^2}\,\mathrm{d}z$

c) $\displaystyle\int_{\partial B(0,1)} \frac{z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-1}\,\mathrm{d}z$

d) $\displaystyle\int_{\partial B(0,2)} \frac{z^3}{z^2+1}\,\mathrm{d}z$

Aufgabe 2 (Berechnung reeller Integrale, Teil 1)
Berechne die folgenden Integrale mit der Methode aus Beispiel 2.25.

a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1+\sin(t)^2}\,\mathrm{d}t.$

b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(t)^2}{a+\cos(t)}\,\mathrm{d}t,\quad$ wobei $a>1$.

Aufgabe 3 (Berechnung reller Integral, Teil 2)
Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \pi,$$

da man die Stammfunktion *arctan* des Integranden kennt. Man kann dieses Ergebnis auch mit den Mitteln der Funktionentheorie auf folgende Art erhalten. Sei $R>1$. Betrachte den geschlossenen Weg $\gamma_R = \gamma_{1,R} \cup \gamma_{2,R}$ mit $\gamma_{1,R}(t) = t$, $t \in [-R,R]$ und $\gamma_{2,R} = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0,\pi]$. Der Residuensatz angewandt auf die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$, $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ zeigt

$$\int_{-R}^{R} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{1+R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}}\,\mathrm{d}t = \int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}(f,\mathrm{i}) = \pi.$$

Das Ergebnis folgt im Grenzwert $R \to \infty$, da

$$\int_{-R}^{R} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \to \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

und

$$\left|\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{1+R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}}\,\mathrm{d}t\right| \le \int_0^{\pi} \frac{R}{|1+R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}|}\,\mathrm{d}t \le \int_0^{\pi} \frac{R}{R^2-1}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi R}{R^2-1} \to 0$$

für $R \to \infty$ gelten.
Berechne mit der gleichen Methode

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t.$$