

Analysis für das Lehramt

7. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Jordaninhalt eines Dreiecks)

Sei Δ ein Dreieck mit Seitenlängen a, b, c und Winkeln α, β, γ , wobei der Winkel α zwischen den Seiten mit Längen b und c liege. Führe ein geeignetes Koordinatensystem ein und beschreibe Δ als Teilmenge von \mathbb{R}^2 . Zeige, dass Δ quadrierbar ist und folgere aus den Eigenschaften in Satz 3.4 die Formel

$$\text{vol}(\Delta) = \frac{1}{2}bc \sin(\alpha).$$

Aufgabe 2 (Satz von Fubini)

Berechne die folgenden Integrale mit dem Satz von Fubini.

a) $\int_{[1,2] \times [1,2]} \frac{2y}{x+y^2} d(x, y)$

d) $\int_{[1,2] \times [2,3] \times [0,2]} \frac{2z}{(x+y)^2} d(x, y, z)$

b) $\int_{[0,\pi] \times [0,1]} x^2 \sin(xy) d(x, y)$

e) $\int_0^1 \left(\int_y^1 e^{x^2} dx \right) dy$

c) $\int_{[-1,1] \times [0,1]} x e^{(x^2-1)y^2} d(x, y)$

f) $\int_0^1 \left(\int_y^{y^2+1} x^2 y dx \right) dy$

Aufgabe 3 (Inhaltsberechnung)

Berechne den Jordaninhalt der folgenden Mengen. Falls die Menge in \mathbb{R}^2 liegt, skizziere sie.

a) $V_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{4}x^2 - 1 < y < 2 - x\}$

b) $V_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0, y^2 < x < 4 - y^2\}$

c) $V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y^2 \leq z^3 \leq x\}$

d) $V_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq z \leq x^2 - y^2\}$

Am Pfingstmontag dem 10. Juni 2019 findet keine Übung statt. Zur Selbstkontrolle sind hier die Ergebnisse von Aufgabe 2 und 3 aufgeführt.

Ergebnisse von Aufgabe 2

a) $8 \log(2) + 3 \log(3) - 5 \log(5)$

d) $16 \log(2) - 4 \log(5) - 4 \log(3)$

b) $\frac{\pi^2}{2} + 2$

e) $\frac{1}{2}(e - 1)$

c) 0

f) $\frac{67}{120}$

Ergebnisse von Aufgabe 3

a) $\text{vol}(V_1) = 21 + \frac{1}{3}$

b) $\text{vol}(V_2) = \frac{8}{3}\sqrt{2}$

c) $\text{vol}(V_3) = \frac{24}{55}$

d) $\text{vol}(V_4) = 5$