Karlsruher Institut für Technologie

12. Juni 2019
Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Andreas Geyer-Schulz

Analysis für das Lehramt

8. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Polar- und Kugelkoordinaten)

a) Sei $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < \sqrt{x^2+y^2} < 2,\ 0 < y < x\right\}$. Berechne $\displaystyle\int_B \frac{y}{x}\,\mathrm{d}(x,y)$.

b) Berechne

$$\int_{B(0,1)} \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}(x,y,z).$$

c) Berechne das Volumen der Menge

$$B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4,\ \sqrt{\tfrac{x^2+y^2}{3}} \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2}\right\}.$$

Aufgabe 2 (Zylinderkoordinaten)

a) Die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei definiert durch $\Phi(r,\varphi,z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$. Zeige $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$, $\Phi([0,\infty) \times [-\pi,\pi] \times \mathbb{R}) = \mathbb{R}^3$ und Φ ist auf $(0,\infty) \times (-\pi,\pi) \times \mathbb{R}$ injektiv. Berechne ferner $\det \Phi'(r,\varphi,z)$.

b) Seien $h > 0$ und $0 < \rho < R$. Der *Hohlzylinder* Z_1 ist definiert durch

$$Z_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq h,\ \rho \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq R\right\},$$

der *Halbzylinder* Z_2 ist definiert durch

$$Z_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq h,\ 0 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq R,\ y \geq 0\right\}.$$

Berechne $\mathrm{vol}(Z_1)$ und $\mathrm{vol}(Z_2)$.

c) Berechne das Integral $\int_{Z_1} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\mathrm{d}(x,y,z)$.

Aufgabe 3 (Volumen klassischer geometrischer Körper)

Im folgenden werden klassische Körper im $\mathbb{R}^3$ beschrieben. Bestimme jeweils ihr Volumen.

a) Die *Steinmetz-Körper* entstehen als Schnitt von zwei beziehungsweise drei senkrechten Kreiszylindern mit Radius $R > 0$, deren Achsen sich jeweils orthogonal schneiden.

b) Der *Vivianische Körper* ensteht als Schnitt der Kugel um 0 mit Radius R und dem Zylinder $\{(x,y,z) : x^2+y^2 < Rx\}$.