Analysis für das Lehramt

10. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Weitere Aufgaben zur mehrdimensionalen Integration)

a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig. Vertausche die Integrationsreihenfolge:

(i) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

(ii) $\displaystyle\int_1^4 \int_{\sqrt{x}}^2 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

(iii) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^{\sin(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

(iv) $\displaystyle\int_0^1 \int_{1-y^2}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

b) Berechne $\displaystyle\int_{[1,2]\times[2,3]\times[0,2]} \frac{2z}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}(x,y,z)$.

c) Berechne das Volumen des Körpers zwischen der Ebene $z = x+y$ und dem Rechteck $[0,1]\times[0,2]\times\{0\}$.

d) Berechne das Volumen des Körpers zwischen der Fläche $z = xy^2 + y^3$ und dem Quadrat $[0,2]\times[0,2]\times\{0\}$.

e) Berechne den Schwerpunkt des Kugeloktanten $B(0,R)\cap\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x,y,z\geq 0\}$.

f) Berechne die Fläche des Bereichs, der von der *Kardioide*

$$\gamma(t) = ((1+\cos(t))\cos(t), (1+\cos(t))\sin(t)), \quad t\in[0,2\pi],$$

umschlossen wird.

g) Sei Z der Zylinder $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\leq R^2\}$. Berechne das Volumen von $Z\cap B(0,2R)$.

h) Sei $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\leq 1\}$. Zeige für alle $n,m\in\mathbb{N}_0$ die Formel

$$\int_D x^n y^m\,\mathrm{d}(x,y) = \frac{n!m!}{(n+m+2)!}.$$

i) Sei $f : [a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und strikt positiv. Zeige die Ungleichung

$$(b-a)^2 \leq \left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t\right).$$

j) Seien $f,g,p : [a,b]\to\mathbb{R}$ stetig, p positiv und f, g beide monoton wachsend (oder beide monoton fallend). Zeige die Ungleichung

$$\left(\int_a^b p(t)f(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b p(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right) \leq \left(\int_a^b p(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b p(t)f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Aufgabe 2 (Oberfläche eines Rotationskörpers)
Sei $f : [a, b] \to [0, \infty)$ stetig differenzierbar. Wir betrachten die Rotationsfläche

$$M = \Big\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; a \leq z \leq b, \; x^2 + y^2 = f(z)^2 \Big\},$$

vgl. auch Bemerkung 3.14 b) für die Diskussion des Volumens von Rotationskörpern.

a) Eine Parametrisierung der geschlitzten Rotationsfläche lautet

$$\Phi : (-\pi, \pi) \times (a, b) \to \mathbb{R}^3, \quad \Phi(\varphi, z) = \begin{pmatrix} f(z) \cos(\varphi) \\ f(z) \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass die Oberfläche von M durch

$$\sigma(M) = 2\pi \int_a^b f(t) \sqrt{1 + f'(t)^2} \, \mathrm{d}t$$

berechnet werden kann.

b) Sei $b \in (1, \infty)$. Setze speziell $a = 1$ und $f(t) = t^{-1}$ für $t \in [1, b]$. Bezeichne mit M_b die zugehörige Rotationsfläche und mit R_b den zugehörigen Rotationskörper, vgl. Bemerkung 3.14 b). Im Grenzfall $b \to \infty$ nennt man die so entstehende Fläche *Gabriels Horn*. Zeige

$$\lim_{b \to \infty} \operatorname{vol}(R_b) = \pi \quad \text{und} \quad \lim_{b \to \infty} \sigma(M_b) = \infty.$$

Diskutiere das folgende Paradoxon: Man kann Gabriels Horn einerseits mit einer endlichen Menge an Farbe füllen, andererseits braucht man eine unendliche Menge an Farbe um seine Oberfläche zu bedecken.