Karlsruher Institut für Technologie

3. Juli 2019
Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Andreas Geyer-Schulz

Analysis für das Lehramt

11. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Freitag, 13. November 2026)
In der Zeitschrift *Science* erschien am 4. November 1960 der Artikel *Doomsday: Friday, 13 November, A.D. 2026*[1] von Heinz von Foerster, Patricia M. Mora und Lawrence W. Amiot. In diesem Artikel wird das Anfangswertproblem

$$N'(t) = \alpha_0 N(t)^{1+1/k}, \quad N(t_1) = N_1$$

zur Modellierung der Größe der Erdbevölkerung vorgeschlagen. Dabei ist $N(t)$ die Anzahl der Menschen zur Zeit t, die in Jahren nach Christi Geburt gemessen wird. Der Anfangswert ist $N_1 = 3{,}018 \cdot 10^9$ im Jahr $t_1 = 1960$. Die dimensionslosen Konstanten α_0 und k werden dadurch bestimmt, dass das obige Modell bestmöglich an die vorhandenen Daten zur Bevölkerungsentwicklung angepasst wird. Sie werden mit $\alpha_0 = 3{,}9661 \cdot 10^{-12}$ und $k = 0{,}99$ angegeben. Berechne die Blow-Up Zeit $t_0 \in (t_1, \infty)$, für die $\lim_{t \to t_0} N(t) = \infty$ gilt. Zeige, dass man die Lösung in der Form $N(t) = N_1 \left(\frac{t_0 - t_1}{t_0 - t}\right)^k$ für $t < t_0$ schreiben kann.

Aufgabe 2 (Trennung der Variablen)
Sei $u_0 \in \mathbb{R}$. Löse die folgenden Anfangswertprobleme und gib jeweils das maximale Intervall an, auf dem die Lösung existiert.

a) $u'(t) = t + 1$, $u(-2) = -1$

b) $u'(t) = 5u(t)$, $u(0) = 2$

c) $u'(t) = u(t)(1 - u(t))$, $u(0) = u_0$

d) $u'(t) = -u^3(t)$, $u(0) = u_0$

e) $u'(t) = (t + \frac{2}{t})u(t)$, $u(1) = 1$

f) $u'(t) = -te^{u(t)}$, $u(0) = 1$

g) $u'(t) = \mathrm{e}^{2t}\sqrt{1 + u(t)^{-2}}$, $u(0) = 1$

Aufgabe 3 (Eine Differentialungleichung)
Sei $f \in C(\mathbb{R})$. Die Funktion $\rho \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ erfülle die strikte Differentialungleichung

$$\rho'(t) < f(\rho(t))$$

für alle $t \in (a, b]$. Sei außerdem $u \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$u'(t) = f(u(t)), \qquad u(a) = u_0$$

für ein $u_0 > \rho(a)$. Zeige, dass $\rho(t) < u(t)$ für alle $t \in [a, b]$ gilt. Dieselbe Aussage gilt, wenn man alle Ungleichungszeichen umkehrt.
Hinweis. Versuche einen Widerspruchsbeweis: Was passiert für den kleinsten Wert von t der $\rho(t) \geq u(t)$ erfüllt?

[1] *Science* 04 Nov 1960: Vol. 132, Issue 3436, pp. 1291-1295, DOI: 10.1126/science.132.3436.1291