Karlsruher Institut für Technologie

10. Juli 2019
Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Andreas Geyer-Schulz

Analysis für das Lehramt

12. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Lineare Differentialgleichungen)
Bestimme jeweils die Lösung des Anfangswertproblems

$$u' = Au + g, \qquad u(0) = u_0.$$

a)
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad g = 0, \qquad u_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2;\ g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}, \qquad u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (Die Matrixexponentialfunktion)

a) Berechne e^{tA} für

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, (iii) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, (v) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$,

(ii) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, (iv) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, (vi) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

b) Finde $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $AB \neq BA$ und $\mathrm{e}^A\mathrm{e}^B \neq \mathrm{e}^{A+B}$.

c) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Es gelte $AB = BA$. Zeige durch Differentiation, dass $\mathrm{e}^{t(A+B)} = \mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{tB}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

d) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gelte $\mathrm{e}^{tA}B = B\mathrm{e}^{tA}$. Zeige, dass $AB = BA$ gilt. *Hinweis:* Differenzieren.

e) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gelte $\mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{tB} = \mathrm{e}^{tB}\mathrm{e}^{tA}$. Zeige, dass $AB = BA$ gilt.

f) *Zusatz:* Finde $A, B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mit $AB \neq BA$ und $I = \mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A\mathrm{e}^B = \mathrm{e}^B\mathrm{e}^A$.