Karlsruher Institut für Technologie

17. Juli 2019
Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Andreas Geyer-Schulz

Analysis für das Lehramt

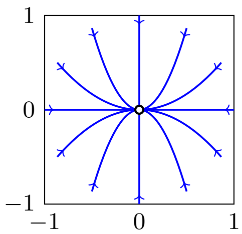
13. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Umgekehrt ist es schwieriger!)
Gegeben ist

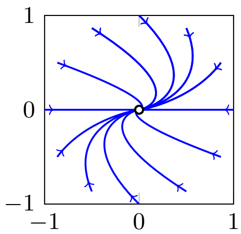
$$\mathrm{e}^{tA} = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{2t} & 2\mathrm{e}^{-t} - 2\mathrm{e}^{2t} & 0 \\ \mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{-t} & 2\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{-t} & 0 \\ t\mathrm{e}^{2t} + 2\mathrm{e}^{2t} - 2\mathrm{e}^{-t} & 2t\mathrm{e}^{2t} + 2\mathrm{e}^{2t} - 2\mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}.$$

Wie lautet A? *Hinweis:* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{tA} = A\mathrm{e}^{tA}$.

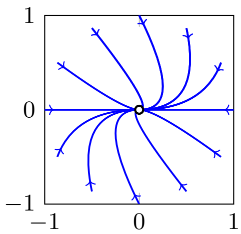
Aufgabe 2 (Wie sehen die Lösungen einer linearen Differentialgleichung aus?)
Die Abbildungen zeigen Lösungen der Differentialgleichung $u'(t) = Au(t)$ für $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.



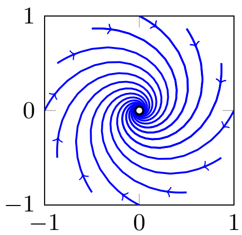
(1)



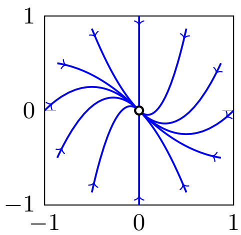
(3)



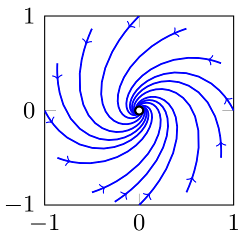
(5)



(2)



(4)



(6)

Ordne den Bildern die folgenden Matrizen zu:

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ e) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ d) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ f) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3 (Zur Übung)
Berechne e^{tA} für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

— bitte wenden —

Aufgabe 4 (Räuber-Beute-Modell)
Eine Verallgemeinerung des Räuber-Beute-Modells aus Beispiel 4.1 lautet

$$\begin{aligned} u'(t) &= au(t) - bu(t)^2 - ru(t)v(t), \quad t \geq 0, \\ v'(t) &= cv(t) - dv(t)^2 + su(t)v(t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Dabei sind Konstanten $a, b, c, d, r, s \geq 0$ und Anfangswerte $u(0) = u_0 \geq 0$ und $v(0) = v_0 \geq 0$ gegeben. Wir wollen das Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - bx^2 - rxy \\ cy - dy^2 + sxy \end{pmatrix}$$

genauer untersuchen.

a) Beschreibt u die Räuber oder die Beute-Population? Warum?

b) Welches Modell wird im Fall $r = s = 0$ beschrieben?

c) Wir nehmen $a, b, c, d, r, s > 0$ und $cr < ad$ an. Bestimme die Lösungsmenge N_1 der Gleichung $f_1(x, y) = 0$ und die Lösungsmenge N_2 von $f_2(x, y) = 0$. Skizziere diese Mengen. Deute durch Pfeile den Verlauf von f auf diesen Mengen an. In jedem Punkt von N_1 verläuft f zum Beispiel parallel zur y-Achse, da die x-Komponente von f in diesem Punkt verschwindet. Bestimme, ob f in so einem Punkt nach unten oder nach oben zeigt. Die Skizze soll dann ähnlich wie im Beispiel in der Übung zum logistischen Wachstum aussehen.

d) Markiere die Menge $N_1 \cap N_2$. In diesen Punkten verschwindet f. Wählt man so einen Punkt als Anfangswert, so erhält man eine konstante Lösung.

e) Zeige mit dem Positivitätskriterium aus Satz 4.16, dass für jede Lösung $u(t) \geq 0$ und $v(t) \geq 0$ auf dem maximalen Existenzintervall gilt.

f) Zeige ebenfalls mit Satz 4.16: Wenn $u_0 = 0$ und $v_0 > 0$, dann erfüllt die Lösung $u(t) = 0$ für alle $t \in [0, \infty)$. Welche Gleichung erfüllt v und wie lautet $\lim_{t\to\infty} v(t)$?