

Analysis für das Lehramt – Sommer 2019**Aufgabe 1 (Funktionentheorie, 3+6+6 Punkte)**

a) Bestimme Real- und Imaginärteil von

(i) i^{-1} , (ii) \sqrt{i} , (iii) $\log(i)$.

b) Betrachte $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{it}$. Berechne die Wegintegrale

(i) $\int_{\gamma} \frac{1}{|z|^2} dz$, (ii) $\int_{\gamma} \frac{\sin(z)}{z^2} dz$.

c) Betrachte $f : \mathbb{C} \setminus \{0, i, -i\} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2(z^2 + 1)}$. Bestimme die Polordnung von f an den Stellen i , $-i$ und 0 . Berechne

(i) $\text{Res}(f, i)$, (ii) $\text{Res}(f, 0)$.

Aufgabe 2 (Integral- und Volumenberechnung, 5+5+5 Punkte)

a) Sei $Q = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}] \subseteq \mathbb{R}^2$. Berechne

$$\int_Q y \sin(x + y^2) d(x, y).$$

b) Sei $f \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Vertausche die Integrationsreihenfolge

$$\int_{-1}^1 \int_0^{x^2} f(x, y) dy dx.$$

c) Betrachte $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0, x - y \geq 0, 2 - x - y \geq 0\}$. Berechne

$$\int_A (x + y) d(x, y).$$

Aufgabe 3 (Differentialgleichungen, 6+9 Punkte)

a) Sei $u_0 \in (0, \infty)$. Bestimme die Lösung des Anfangswertproblems $u'(t) = e^{-t}u(t)^2$, $u(0) = u_0$ und ihr maximales Existenzintervall. Falls die Lösung für alle $t \in [0, \infty)$ existiert, bestimme $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$.

b) Sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Berechne e^{tA} für $t \in [0, \infty)$.

(ii) Gib ein $u_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ an, welches $e^{tA}u_0 \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$ erfüllt und gib ein $u_1 \in \mathbb{R}^3$ an, welches $|e^{tA}u_1|_2 \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$ erfüllt.