Analysis für das Lehramt
Lösungsvorschlag zum 1. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Rechnen mit komplexen Zahlen)

a) Sei $z = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})$. Bestimme den Real- und Imaginärteil von z^n für jedes $n \in \mathbb{Z}$.

b) Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt $z = |z|$? Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt $z^2 = |z|^2$?

c) Skizziere die Mengen

(i) $D_0 = \{z \in \mathbb{C} :\ 1 \le \operatorname{Re} z \le 2, 0 \le \operatorname{Im} z \le 1\}$,

(ii) $D_1 = \{-z :\ z \in D_0\}$,

(iii) $D_2 = \{\mathrm{i}z :\ z \in D_0\}$,

(iv) $D_3 = \{z^2 :\ z \in D_0\}$,

(v) $D_4 = \{z^{-1} :\ z \in D_0\}$,

(vi) $C_1 = \{z \in \mathbb{C} :\ |z-3-\mathrm{i}| < 1 \text{ und } |z-2+\mathrm{i}| \le 2\}$,

(vii) $C_2 = \left\{z \in \mathbb{C} :\ |z+\mathrm{i}| + |z-\mathrm{i}| = \frac{10}{3}\right\}$.

d) Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$.

(i) Ist f beschränkt? (*Zusatz*: Ist f stetig in 0?)

(ii) Ersetze $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{C}$: Was ist die größtmögliche Definitionsmenge in $\mathbb{C}^2$ für die Funktion $(z,w) \mapsto \frac{zw}{z^2+w^2}$? Ist diese Funktion beschränkt?

e) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gelten das Exponentialgesetz $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+y)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$ sowie die Additionsformeln $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$ und $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$. Erkläre den Zusammenhang.

Lösungsvorschlag.

a) In Polarkoordinaten gilt $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$. Damit ist

$$z^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi/4} = \begin{cases} 1, & n \equiv 0 \mod 8, \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i}) = z, & n \equiv 1 \mod 8, \\ \mathrm{i}, & n \equiv 2 \mod 8, \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+\mathrm{i}) = -\bar{z}, & n \equiv 3 \mod 8, \\ -1, & n \equiv 4 \mod 8, \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i}) = -z, & n \equiv 5 \mod 8, \\ -\mathrm{i}, & n \equiv 6 \mod 8, \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i}) = \bar{z}, & n \equiv 7 \mod 8, \end{cases}$$

für jedes $n \in \mathbb{Z}$.

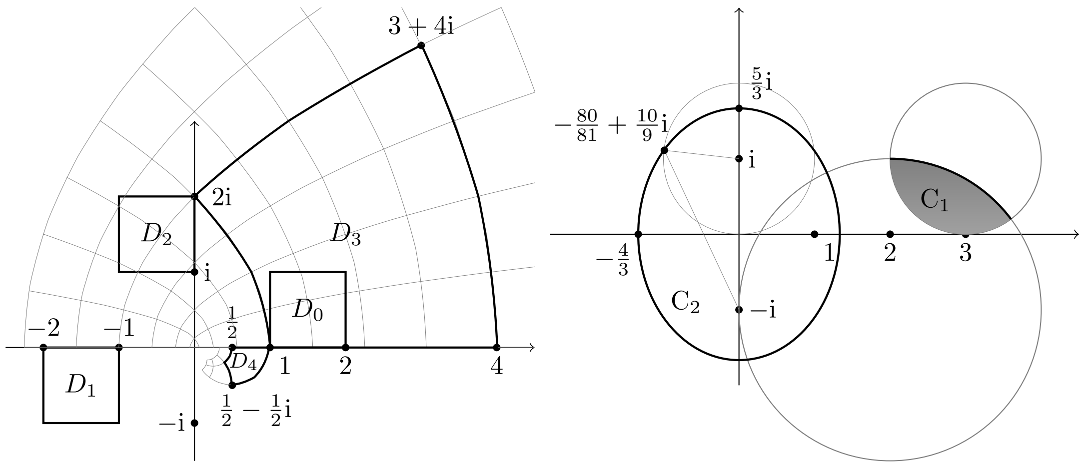
b) Für $z \in \mathbb{C}$ setze $x = \operatorname{Re} z$ und $y = \operatorname{Im} z$. Es gelten die folgenden Äquivalenzen

$$\begin{aligned} z = |z| &\iff x + \mathrm{i}y = \sqrt{x^2+y^2} \\ &\iff x = \sqrt{x^2} \wedge y = 0 \\ &\iff z \in \mathbb{R}_{\geq 0} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} z^2 = |z|^2 &\iff x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy = x^2 + y^2 \\ &\iff xy = 0 \wedge x^2 - y^2 = x^2 + y^2 \\ &\iff y = 0 \\ &\iff z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

c) Skizze der Mengen D_0, D_1, D_2, D_3, D_4, C_1 und C_2.



d) (i) Sei $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Aus $0 \leq (|x| - |y|)^2 = x^2 + y^2 - 2|xy|$ folgt $\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{1}{2}$. Somit ist f beschränkt. Die Funktion f ist jedoch unstetig in 0, da die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} f(0, \frac{1}{n}) = 0$ und $\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$ verschieden sind.

(ii) Für $(z,w) \in \mathbb{C}^2$ ist der Ausdruck $\frac{zw}{z^2+w^2}$ nur dann definiert, wenn $z^2 + w^2 \neq 0$ gilt. Betrachtet man $z_n = \frac{1}{n}$ und $w_n = \frac{\mathrm{i}}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so erhält man

$$\left|\frac{z_n w_n}{z_n^2 + w_n^2}\right| = \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}} = \frac{n^2(n+1)^2}{n(n+1)(2n+1)} \to \infty \quad \text{für } n \to \infty.$$

Also ist die Abbildung $(z,w) \mapsto \frac{zw}{z^2+w^2}$ unbeschränkt auf der Menge $\mathbb{C}^2 \setminus \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : z^2 + w^2 = 0\}$.

e) Aus dem Exponentialgesetz $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+y)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$ und der Eulerschen Formel $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} =$

$\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)$ erhält man

$$\begin{aligned}
&\cos(x+y) + \mathrm{i}\sin(x+y)\\
&\quad = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+y)}\\
&\quad = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}\\
&\quad = \big(\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)\big)\big(\cos(y) + \mathrm{i}\sin(y)\big)\\
&\quad = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) + \mathrm{i}\sin(x)\cos(y) + \mathrm{i}\cos(x)\sin(y)
\end{aligned}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Betrachtet man in obiger Gleichung Real- und Imaginärteil, so erhält man die Additionstheoreme für Sinus und Kosinus. $\square$

Aufgabe 2 (Komplexe Differenzierbarkeit und Holomorphie)
Betrachte die folgenden Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. In welchen Punkten ist f komplex differenzierbar? Bestimme für diese Punkte die Ableitung. Gibt es eine Menge, auf der f holomorph ist?

a) $f(z) = z^3 - 2\mathrm{i}z^2 + \mathrm{i}z - 1$, für alle $z \in \mathbb{C}$.

b) $f(x + \mathrm{i}y) = \sin(x)\sin(y) - \mathrm{i}\cos(x)\cos(y)$, für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

c) $f(z) = z\operatorname{Re} z$, für alle $z \in \mathbb{C}$.

d) $f(z) = \sqrt{|\operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z|}$, für alle $z \in \mathbb{C}$.

Lösungsvorschlag.

a) Die Funktion f ist eine Polynomfunktion und somit beliebig oft differenzierbar. Die bekannten Ableitungsregeln liefern

$$f'(z) = 3z^2 - 4\mathrm{i}z + \mathrm{i}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Da $\mathbb{C}$ eine offene Menge ist, ist f außerdem holomorph auf $\mathbb{C}$.

b) Wir setzen $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$. Laut Aufgabenstellung gilt $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u(x, y) = \sin(x)\sin(y)$ und $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $v(x, y) = -\cos(x)\cos(y)$. Die Funktionen u und v sind stetig differenzierbar und wir berechnen die partiellen Ableitungen

$$\partial_x u(x, y) = \cos(x)\sin(y), \quad \partial_y u(x, y) = \sin(x)\cos(y)$$

sowie

$$\partial_x v(x, y) = \sin(x)\cos(y), \quad \partial_y v(x, y) = \cos(x)\sin(y)$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Damit gilt $\partial_x u(x, y) = \partial_y v(x, y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und

$$\partial_y u(x, y) = -\partial_x v(x, y) \iff \sin(x)\cos(y) = 0 \iff (x, y) \in \pi\mathbb{Z}\times\mathbb{R}\cup\mathbb{R}\times\left(\tfrac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right).$$

Sei $z \in \mathbb{C}$. Nach Satz 1.5 ist f genau dann komplex differenzierbar in z, wenn die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen in z erfüllt sind. Also folgt aus obiger Rechnung, dass f genau dann komplex differenzierbar in z ist, wenn $z \in \pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ gilt. In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned} f'(z) &= \partial_x u(x,y) - \mathrm{i}\partial_y u(x,y) \\ &= \begin{cases} (-1)^k \sin(y), & \text{falls } z = k\pi + \mathrm{i}y \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \text{ und ein } y \in \mathbb{R}, \\ (-1)^k \cos(x), & \text{falls } z = x + \mathrm{i}(\frac{\pi}{2} + k\pi) \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \text{ und ein } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \end{aligned}$$

Es gibt keine nichtleere offene Menge, auf der f komplex differenzierbar ist. Also ist f nirgends holomorph.

c) Sei $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Angenommen f wäre komplex differenzierbar in z_0. Definiere die Funktionen $h_1 : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{2}$, $h_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \operatorname{Re} z$, $h_3 : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{f(z)}{z}$, $h_4 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$. Die Funktion h_1 ist eine ganzrationale Funktion, deren Nenner keine Nullstellen besitzt. Also ist h_1 holomorph, insebsondere ist h_1 im Punkt z_0 komplex differenzierbar. Nach Annahme ist f in z_0 differenzierbar und somit zeigt die Kettenregel, dass h_3 in z_0 komplex differenzierbar ist. Es gilt jedoch $h_3(z) = h_2(z)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Da z_0 ein innerer Punkt der Menge $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist, folgt auch, dass h_2 in z_0 komplex differenzierbar ist. Wegen $h_4(z) = \bar{z} = 2\operatorname{Re} z - z = 2h_2(z) - z$ für alle $z \in C$ folgt schließlich, dass auch h_4 in z_0 komplex differenzierbar ist. Dies widerspricht dem Resultat von Beispiel 1.6a). Also war unsere Annahme falsch und f ist nicht komplex differenzierbar in z_0.

Wir untersuchen nun noch die komplexe Differenzierbarkeit von f im Punkt 0. Wir berechnen

$$\lim_{z \to 0} \frac{1}{z}(f(z) - f(0)) = \lim_{z \to 0} \operatorname{Re} z = 0.$$

Also ist f komplex differenzierbar in 0 und es gilt $f'(0) = 0$. Es gibt keine nichtleere offene Menge, auf der f komplex differenzierbar ist. Also ist f nirgends holomorph.

d) Wir setzen $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$. Laut Aufgabenstellung gilt $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u(x,y) = \sqrt{|x-y|}$ und $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $v(x,y) = 0$. Setze $M = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Auf $\mathbb{R}^2 \setminus M$ sind u und v stetig partiell differenzierbar und es gilt

$$\partial_x u(x,y) = \frac{\operatorname{sgn}(x-y)}{2\sqrt{|x-y|}} \neq 0 = \partial_y v(x,y)$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus M$. Also werden in diesen Punkten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen nicht erfüllt und nach Satz 1.5 ist f in diesen Punkten nicht komplex differenzierbar.

Sei $x \in \mathbb{R}$. Wir untersuche noch die komplexe Differenzierbarkeit im Punkt $x + \mathrm{i}x$. Es gilt $f(x + \mathrm{i}x) = 0$ und somit

$$\lim_{h \to 0+} \frac{1}{h}(f(x + h + \mathrm{i}x) - f(x + \mathrm{i}x)) = \lim_{h \to 0+} \frac{\sqrt{|h|}}{h} = \lim_{h \to 0+} h^{-1/2} = \infty.$$

Also ist f nicht komplex differenzierbar in $x + \mathrm{i}x$ und wir haben insgesamt gezeigt, dass f nirgends komplex differenzierbar ist. □

Aufgabe 3 (Holomorphie und harmonische Funktionen)

a) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph. Definiere $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$. Wir setzen voraus, dass die Funktionen $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zweimal stetig differenzierbar sind. Zeige, dass u *harmonisch* ist, d.h., es gilt $\Delta u(x,y) = 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

b) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $u_\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$u_\lambda(x,y) = x^4 + y^4 + \lambda x^2 y^2 \quad \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

gegeben. Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt es eine holomorphe Funktion f mit $u_\lambda = \operatorname{Re} f$? Bestimme in diesem Fall eine derartige Funktion f. Bestimme alle.

Lösungsvorschlag.

a) Sei $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Wir berechnen unter Verwendung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen $\partial_x u(x,y) = \partial_y v(x,y)$ und $\partial_y u(x,y) = -\partial_x v(x,y)$ sowie dem Satz von Schwarz

$$\begin{aligned}\Delta u(x,y) &= \partial_x^2 u(x,y) + \partial_y^2 u(x,y) \\ &= \partial_x(\partial_x u(x,y)) + \partial_y(\partial_y u(x,y)) \\ &= \partial_x \partial_y v(x,y) - \partial_y \partial_x v(x,y) \\ &= 0.\end{aligned}$$

b) Die Funktion u_λ ist eine Polynomfunktion und somit beliebig oft differenzierbar. Wenn es eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $u_\lambda = \operatorname{Re} f$ gibt, dann folgt aus Teil a), dass u harmonisch ist. Wir berechnen

$$\begin{aligned}\Delta u(x,y) &= \partial_x^2 u(x,y) + \partial_y^2 u(x,y) \\ &= 12x^2 + 12y^2 + 2\lambda x^2 + 2\lambda y^2.\end{aligned}$$

Also ist u genau dann harmonisch, wenn $\lambda = -6$ gilt. Definiere $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch $f(z) = z^4$. Man rechnet leicht nach, dass $u_{-6} = \operatorname{Re} f$ gilt. Für jede reelle Zahl a gilt somit auch $u_{-6} = \operatorname{Re}(f + \mathrm{i}a)$.

Wir *behaupten* nun, dass jede holomorphe Funktion g mit $\operatorname{Re} g = u_{-6}$ diese Form hat. Sei also $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und es gelte $\operatorname{Re} g = u_{-6} = \operatorname{Re} f$. Dann ist durch $h = g - f$ eine holomorphe Funktion h mit $\operatorname{Re} h = 0$ gegeben. Setze $v = \operatorname{Im} h$. Aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen folgt, dass $\partial_x v(x,y) = 0$ und $\partial_y v(x,y) = 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt. Da $\mathbb{R}^2$ sternförmig ist, folgt aus dem Lemma von Poincaré in Analysis 2, dass v konstant ist. Es gibt also ein $a \in \mathbb{R}$ mit $h(z) = \mathrm{i}a$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Damit folgt die Behauptung. $\square$