Karlsruher Institut für Technologie

13. Mai 2019
Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Andreas Geyer-Schulz

Analysis für das Lehramt
Lösungsvorschlag zum 3. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Berechnung von Kurvenintegralen, Teil 1)
Berechne jeweils für $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und den Weg γ die folgenden Kurvenintegrale $\int_\gamma f \, \mathrm{d}z$.

a) $f(z) = \bar{z}^3$, $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, \pi]$,

b) $f(z) = \bar{z}$, $\gamma(t) = t + \mathrm{i}t^2$, $t \in [0, 1]$,

c) $f(z) = \bar{z}z^2$, $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi - t)}, t \in [0, \pi/2]$,

d) $f(z) = \bar{z}z^2$, γ Verbindungsstrecke von -1 nach i,

e) $f(z) = |z|^2$, γ durchlaufe einmal im Gegenuhrzeigersinn den Rand der Menge $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \in (0, 1)\}$.

f) $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(0) = 1$, $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, t \in [0, 2\pi]$.
Hinweis: Sinusreihe und Satz 1.19.

Lösungsvorschlag.

a) Seien $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$; $f(z) = \bar{z}^3$ und $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, \pi]$. Die Funktion f ist stetig, der Weg γ ist stetig differenzierbar und es gilt

$$\int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z = \int_0^\pi \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}t} \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \, \mathrm{d}t = \int_0^\pi \mathrm{i}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t} \, \mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{2} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t} \right]_0^\pi = 0.$$

b) Seien $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$; $f(z) = \bar{z}$ und $\gamma(t) = t + \mathrm{i}t^2$, $t \in [0, 1]$. Die Funktion f ist stetig, der Weg γ ist stetig differenzierbar und es gilt

$$\int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z = \int_0^1 (t - \mathrm{i}t^2)(1 + 2\mathrm{i}t) \, \mathrm{d}t = \int_0^1 t + \mathrm{i}t^2 + 2t^3 \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\mathrm{i} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{3}\mathrm{i}.$$

c) Seien $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$; $f(z) = \bar{z}z^2$ und $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi - t)}$, $t \in [0, \pi/2]$. Die Funktion f ist stetig, es gilt $\gamma(t) = -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$, $\gamma'(t) = \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$ und wir erhalten

$$\int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z = -\mathrm{i} \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} \, \mathrm{d}t = -\mathrm{i} \left[\frac{\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}}{-2\mathrm{i}} \right]_0^{\pi/2} = -1.$$

d) Seien $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$; $f(z) = \bar{z}z^2$ und $\gamma(t) = -1 + t(\mathrm{i} + 1)$, $t \in [0, 1]$, die Parametrisierung der Verbindungsstrecke wie in Beispiel 1.15b). Die Funktion f ist stetig, der Weg γ ist stetig differenzierbar und es gilt $\gamma'(t) = 1 + i$ für alle $t \in [0, 1]$ Wegen $f(z) = z \, |z|^2$ ist

$$\begin{aligned} f(\gamma(t)) &= ((t - 1) + \mathrm{i}t) \, |(t - 1) + \mathrm{i}t|^2 \\ &= (t - 1)^3 + (t - 1)t^2 + \mathrm{i} \left(t(t - 1)^2 + t^3 \right) \\ &= (2t^3 - 4t^2 + 3t - 1) + \mathrm{i}(2t^3 - 2t^2 + t). \end{aligned}$$

Unter Verwendung von $\int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$ erhält man also

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left((2t^3-4t^2+3t-1)+\mathrm{i}(2t^3-2t^2+t)\right)(1+\mathrm{i})\,dt \\ &= \left(\frac{2}{4}-\frac{4}{3}+\frac{3}{2}-1\right)(1+\mathrm{i})+\left(\frac{2}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{i}(1+\mathrm{i}) \\ &= -\frac{1+\mathrm{i}}{3}+\frac{\mathrm{i}-1}{3} \\ &= -\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

e) Der Weg γ parametrisiert den Rand des Quadrates mit den Ecken 0, 1, $1+\mathrm{i}$ und i, setzt sich also zusammen aus den vier Teilwegen

$$\begin{aligned}&\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{C}, t \mapsto t, && \gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{C}, t \mapsto 1+\mathrm{i}t, \\ &\gamma_3 : [0,1] \to \mathbb{C}, t \mapsto 1-t+\mathrm{i}, && \gamma_4 : [0,1] \to \mathbb{C}, t \mapsto \mathrm{i}(1-t).\end{aligned}$$

Da die Funktion f stetig ist, der Weg γ stückweise stetig differenzierbar ist, folgt unter Beachtung von $\int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$ somit

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= \sum_{k=1}^4 \int_{\gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \sum_{k=1}^4 \int_0^1 f(\gamma_k(t))\gamma_k'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t + \int_0^1 (1+t^2)\mathrm{i}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 (1-t)^2+1\,\mathrm{d}t - \int_0^1 (1-t)^2\mathrm{i}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \Big(t^2-(1-t)^2-1+\mathrm{i}(1+t^2-(1-t)^2)\Big)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (2t-2+2\mathrm{i}t)\,\mathrm{d}t \\ &= -1+\mathrm{i}.\end{aligned}$$

f) Seien $f : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C};\ f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$ und $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0,2\pi]$. Die Sinusreihe $\sin(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$ konvergiert gleichmäßig für $z \in B(0,2)$. Also folgt mit Satz 1.19b) und Beispiel 1.18a)

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n}\,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_\gamma z^{2n}\,\mathrm{d}z = 0. \qquad \square$$

Aufgabe 2 (Berechnung von Kurvenintegralen, Teil 2)

a) Sei p eine Polynom, $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, t \in [0,2\pi]$. Zeige

$$\int_\gamma \overline{p(z)}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\overline{p'(0)}.$$

b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir wollen einen Beweis für die Formel

$$\int_0^{2\pi} \cos(t)^{2n}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2^{2n-1}}\binom{2n}{n}$$

nachvollziehen. Betrachte dazu $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$; $f(z) = \frac{1}{2^{2n}}\frac{1}{\mathrm{i}z}\left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n}$ sowie den Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$; $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$.

(i) Zeige

$$\int_0^{2\pi} \cos(t)^{2n}\,\mathrm{d}t = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z.$$

(ii) Wende die binomische Formel auf f an und berechne damit das Integral $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ mit Hilfe von Beispiel 1.18a).

Lösungsvorschlag.

a) Das Polynom p habe die Darstellung $p(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$, dann folgt

$$\begin{aligned}\int_\gamma \overline{p(z)}\,\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} \overline{p(\gamma(t))}\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}}\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{i}\int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} e^{-\mathrm{i}kt}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{i}\sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-k)t}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Wir setzen zur Abkürzung $I_k = \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-k)t}\,\mathrm{d}t$. Dann gilt

$$I_1 = \int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t = 2\pi \qquad \text{und} \qquad I_k = \left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-k)t}}{\mathrm{i}(1-k)}\right]_{t=0}^{2\pi} = \frac{1-1}{\mathrm{i}(1-k)} = 0 \qquad \text{für } k \neq 1.$$

Berücksichtigt man nun noch $p'(0) = \sum\limits_{k=1}^{n} k a_k z^{k-1}|_{z=0} = a_1$, so ergibt sich

$$\int_\gamma \overline{p(z)}\,\mathrm{d}z = \mathrm{i}\sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} I_k = \mathrm{i}\cdot 2\pi\overline{a_1} = 2\pi\mathrm{i}\overline{p'(0)}. \qquad \square$$

b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Betrachte $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$; $f(z) = \frac{1}{2^{2n}}\frac{1}{\mathrm{i}z}\left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n}$ sowie den Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$; $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$. Für $t \in [0, 2\pi]$ folgt $f(\gamma(t))\gamma'(t) = \frac{1}{2^{2n}}\frac{1}{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\right)^{2n}\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2}\right)^{2n} = \cos(t)^{2n}$. Es gil also

$$\int_0^{2\pi} \cos(t)^{2n}\,\mathrm{d}t = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Mit der binomischen Formel erhalten wir zunächst

$$f(z) = \frac{1}{2^{2n}} \frac{1}{\mathrm{i}z} \left(z + \frac{1}{z} \right)^{2n} = \frac{1}{2^{2n}} \frac{1}{\mathrm{i}z} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^k z^{k-2n} = \frac{1}{\mathrm{i}2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^{2k-2n-1}.$$

Nach Beispiel 1.18a) liefert nur der Summand mit $n = k$ den Beitrag $2\pi\mathrm{i}$ zum Integral und wir erhalten somit

$$\int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z = \frac{1}{\mathrm{i}2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \int_\gamma z^{2k-2n-1} \, \mathrm{d}z = \frac{2\pi}{2^{2n}} \binom{2n}{n}.$$