Karlsruher Institut für Technologie

20. Mai 2019
Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Andreas Geyer-Schulz

# Analysis für das Lehramt

## Lösungsvorschlag zum 4. Übungsblatt

**Aufgabe 1 (Cauchys Integralsatz und -formel)**
Seien $a, b \in \mathbb{C}$, $r \in (0,\infty)$ und $n \in \mathbb{N}$. Berechne die folgenden Kurvenintegrale.

a) $\displaystyle\int_{\partial B(0,r)} \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z.$
Unterscheide, ob $|a| < r$ oder $|a| > r$.

b) $\displaystyle\int_{\partial B(0,r)} \frac{1}{(z-a)(z-b)}\,\mathrm{d}z,$
wobei $|a| < r$ und $|b| > r$ gelte.

c) $\displaystyle\int_{\partial B(0,1)} \frac{\mathrm{e}^z}{z^2+3z}\,\mathrm{d}z.$

d) $\displaystyle\int_{\partial B(-3,3)} \frac{z^3}{z^2+1}\,\mathrm{d}z.$

e) $\displaystyle\int_{\partial B(0,2)} \frac{z^3}{z^2+1}\,\mathrm{d}z.$

f) $\displaystyle\int_{\partial B(0,2)} \frac{\sin z}{z+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z.$

g) $\displaystyle\int_{\partial B(0,2)} \frac{\mathrm{e}^{2z}}{(z+1)^4}\,\mathrm{d}z.$

h) $\displaystyle\int_{\partial B(1,1)} \frac{z^n}{(z-1)^n}\,\mathrm{d}z.$

*Lösungsvorschlag.*

a) Falls $|a| < r$, definiere $D = \mathbb{C}$ und $f : D \to \mathbb{C}$, $f(z) = 1$. In diesem Fall liefert Cauchys Integralformel

$$\int_{\partial B(0,r)} \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z = \int_{\partial B(0,r)} \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}f(a) = 2\pi\mathrm{i}.$$

Falls $|a| > r$, definiere $D = B(0, \frac{r+|a|}{2})$ und $f : D \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z-a}$. Da der Nenner keine Nullstellen in $D$ hat, ist $f$ holomorph auf $D$ und Cauchys Integralsatz liefert

$$\int_{\partial B(0,r)} \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z = 0.$$

b) Definiere $D = B(0, \frac{r+|b|}{2})$ und $f : D \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z-b}$. Da der Nenner keine Nullstellen in $D$ hat, ist $f$ eine holomorphe Funktion. Cauchys Integralformel liefert

$$\int_{\partial B(0,r)} \frac{1}{(z-a)(z-b)}\,\mathrm{d}z = \int_{\partial B(0,r)} \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}f(a) = \frac{2\pi\mathrm{i}}{a-b}.$$

c) Definiere $D = B(0,2)$ und $f : D \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{\mathrm{e}^z}{z+3}$. Die Funktion $f$ ist holomorph und es gilt $0 \in B(0,1) \subset \bar{B}(0,1) \subset D$. Damit folgt aus Cauchys Integralformel (Theorem 2.7)

$$\int_{\partial B(0,1)} \frac{\mathrm{e}^z}{z^2+3z}\,\mathrm{d}z = \int_{\partial B(0,1)} \frac{\mathrm{e}^z}{z(z+3)}\,\mathrm{d}z = \int_{\partial B(0,1)} \frac{f(z)}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}f(0) = \mathrm{i}\frac{2\pi}{3}.$$

d) Definiere $D = B(-3,\pi)$ und $f : D \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{z^3}{z^2+1}$. Da die Nullstellen des Nenners bei $\pm\mathrm{i}$ liegen und $|\pm\mathrm{i}+3| = \sqrt{10} > \frac{22}{7} > \pi > 3$ ist, ist $f$ holomorph auf dem sternförmigen Gebiet $D$. Außerdem liegt $\partial B(-3,3)$ in $D$ und es folgt aus Cauchys Integralsatz (Theorem 2.5)

$$\int_{\partial B(-3,3)} \frac{z^3}{z^2+1}\,\mathrm{d}z = \int_{\partial B(-3,3)} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

e) Durch Partialbruchzerlegung erhält man $\frac{z^3}{z^2+1} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{z^3}{z-\mathrm{i}} - \frac{z^3}{z+\mathrm{i}}\right)$ für alle $z \in \mathbb{C}\setminus\{\pm\mathrm{i}\}$. Setze nun $D = \mathbb{C}$. Da die Funktion $f : D \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^3$, holomorph ist und $\pm\mathrm{i} \in B(0,2) \subset \bar{B}(0,2) \subset D$ gilt, erhält man aus der Linearität des Integrals und Cauchys Integralformel

$$\begin{aligned}\int_{\partial B(0,2)} \frac{z^3}{z^2+1}\,\mathrm{d}z &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\int_{\partial B(0,2)} \frac{f(z)}{z-\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z - \int_{\partial B(0,2)} \frac{f(z)}{z+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z\right)\\ &= \pi\big(f(\mathrm{i}) - f(-\mathrm{i})\big)\\ &= -2\pi\mathrm{i}.\end{aligned}$$

f) Setze $D = \mathbb{C}$. Die Funktion $f : D \to \mathbb{C}$, $f(z) = \sin(z)$, ist holomorph. Da $-\mathrm{i} \in B(0,2) \subset \bar{B}(0,2) \subset D$ gilt, liefert Cauchys Integralformel

$$\int_{\partial B(0,2)} \frac{\sin(z)}{z+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z = \int_{\partial B(0,2)} \frac{f(z)}{z+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}f(-\mathrm{i}) = 2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}^2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}^2}}{2\mathrm{i}} = 2\pi\sinh(1).$$

g) Setze $D = \mathbb{C}$. Die Funktion $f : D \to \mathbb{C}$, $f(z) = \mathrm{e}^{2z}$, ist holomorph. Da $-1 \in B(0,2) \subset \bar{B}(0,2) \subset D$ gilt, liefert Cauchys Integralformel

$$\int_{\partial B(0,2)} \frac{\mathrm{e}^{2z}}{(z+1)^4}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi\mathrm{i}}{3!}f'''(-1) = \mathrm{i}\frac{8\pi\mathrm{e}^{-2}}{3}.$$

h) Sei $n \in \mathbb{N}$ und setze $D = \mathbb{C}$. Die Funktion $f : D \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^n$, ist holomorph und es gilt $f^{(n-1)}(1) = n!$. Da $1 \in B(1,1) \subset \bar{B}(1,1) \subset D$ gilt, liefert Cauchys Integralformel

$$\int_{\partial B(1,1)} \frac{z^n}{(z-1)^n}\,\mathrm{d}z = \int_{\partial B(1,1)} \frac{f(z)}{(z-1)^{n-1+1}}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi\mathrm{i}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(1) = 2\pi\mathrm{i}n. \quad \square$$

**Aufgabe 2 (Potenzreihenentwicklung am Beispiel der geometrischen Reihe)**
Betrachte $f : \mathbb{C}\setminus\{1\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{1-z}$.

a) Entwickle $f$ in eine Potenzreihe um 0 und bestimme den Konvergenzradius.

b) Sei $w \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$. Entwickle $f$ in eine Potenzreihe um $w$ und bestimme den Konvergenzradius.

c) Entwickle die Funktion $z \mapsto \frac{1}{1+z^2}$ um jeden Punkt in $\mathbb{C}\setminus\{\mathrm{i},-\mathrm{i}\}$.

*Lösungsvorschlag.*

a) Für alle $z \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt die Formel
$$\sum_{n=0}^{k} z^n = \frac{1 - z^{k+1}}{1 - z}.$$
Dies kann man zum Beispiel leicht mit vollständiger Induktion beweisen. Falls $|z| < 1$ gilt, liefert die Betrachtung von $k \to \infty$ die geometrische Reihe
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$
für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$.

b) Es gilt
$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-w}\frac{1}{1-\frac{z-w}{1-w}} = \frac{1}{1-w}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-w}{1-w}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(1-w)^{-n-1}(z-w)^n$$
für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - w| < |1 - w|$ nach Teil a). Der Konvergenzreadius der Reihe ist also $|1 - w|$.

c) Sei $w \in \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$. Partialbruchzerlegung liefert
$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\mathrm{i}z} + \frac{1}{1-\mathrm{i}z}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}-w}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-w}{\mathrm{i}-w}} + \frac{-\mathrm{i}}{-\mathrm{i}-w}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-w}{-\mathrm{i}-w}}\right).$$
Es folgt für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - w| < \min\{|w - \mathrm{i}|, |w + \mathrm{i}|\}$ die Potenzreihenentwicklung
$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\mathrm{i}(\mathrm{i}-w)^{-n-1} - \mathrm{i}(-\mathrm{i}-w)^{-n-1}\right)(z-w)^n. \qquad \square$$

**Aufgabe 3 (Folgerungen aus dem Satz von Liouville)**

a) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion, die nicht konstant ist.
Zeige, dass das Bild von $f$ dicht in $\mathbb{C}$ ist.

b) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion mit $f(z) \notin \mathbb{R}$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
Zeige, dass $f$ konstant ist.

*Lösungsvorschlag.*

a) Angenommen $f(\mathbb{C})$ wäre nicht dicht in $\mathbb{C}$. Dann gibt es ein $w_0 \in \mathbb{C}$ und ein $r > 0$ mit $B(w_0, r) \subseteq \mathbb{C} \setminus f(\mathbb{C})$. Definiere $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g(z) = (f(z) - w_0)^{-1}$. Nach Voraussetzung ist die Funktion $g$ ganz und es gilt $|g(z)| = |f(z) - w_0|^{-1} \leq \frac{1}{r}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Somit ist $g$ nach dem Satz von Liouville konstant, folglich ist auch $f$ konstant, ein Widerspruch. Es folgt die Behauptung.

b) Angenommen $f$ wäre nicht konstant. Nach Teil a) ist dann $f(\mathbb{C})$ dicht in $\mathbb{C}$. Es gibt insbesondere $w_0, w_1 \in f(\mathbb{C})$ mit $\operatorname{Im} w_0 > 0$ und $\operatorname{Im} w_1 < 0$. Da $f$ stetig und $\mathbb{C}$ wegzusammenhängend ist, ist auch $f(\mathbb{C})$ wegzusammenhängend. Sei $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ ein Weg, der $w_0$ mit $w_1$ verbindet und $\gamma([0, 1]) \subseteq f(\mathbb{C})$ erfüllt. Da $\operatorname{Im}\gamma$ stetig ist, existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $\tau \in (0, 1)$ mit $\operatorname{Im}\gamma(\tau) = 0$, also $w_2 := \gamma(\tau) \in \mathbb{R}$. Da $w_2$ in $f(\mathbb{C})$ liegt, erhält man einen Widerspruch. Also ist $f$ konstant. $\square$