Karlsruher Institut für Technologie

27. Mai 2019
Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Andreas Geyer-Schulz

Analysis für das Lehramt

Lösungsvorschlag zum 5. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Isolierte Singularitäten)
Bestimme jeweils Art und Lage aller isolierter Singularitäten der Funktion f. Wenn f in z_0 eine hebbare Singularität hat, dann bestimme $f(z_0)$ so, dass f analytisch in einer Umgebung von z_0 ist, wenn f einen Pol in z_0 hat, dann bestimme die Polordnung und berechne das Residuum $\operatorname{Res}(f, z_0)$.

a) $f(z) = \dfrac{z}{z^2 - z - 12}$

b) $f(z) = \dfrac{\sin z - z}{z^3}$

c) $f(z) = \dfrac{1}{(z^2 + b^2)^2}$ für $b > 0$

d) $f(z) = \dfrac{z}{(z^2 + b^2)^2}$ für $b > 0$

e) $f(z) = \dfrac{e^{1/z}}{(z-1)^2}$

f) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^3 - \pi^2 z}$

g) $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{1 - \cos z}$

h) $f(z) = \dfrac{1}{\sin(1/z)}$

Lösungsvorschlag.

a) Definiere $D = \mathbb{C} \setminus \{-3, 4\}$ und betrachte die Funktion

$$f : D \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{z}{z^2 - z - 12} = \frac{z}{(z-4)(z+3)}.$$

Offensichtlich ist f holomorph. Die Funktionen $g_1 : B(-3, 1) \to \mathbb{C}$, $g_1(z) = \frac{z}{z-4}$ und $g_2 : B(4, 1) \to \mathbb{C}$, $g_2(z) = \frac{z}{z+3}$ sind holomorph mit $g_1(-3) = \frac{3}{7} \neq 0$ und $g_2(4) = \frac{4}{7} \neq 0$. Da $f(z) = (z+3)^{-1} g_1(z)$ für alle $z \in B(-3, 1)$ und $f(z) = (z-4)^{-1} g_2(z)$ für alle $z \in B(4, 1)$ gelten, besitzt f Pole erster Ordnung in -3 und 4. Mit der Formel aus Lemma 2.24 erhalten wir

$$\operatorname{Res}(f, -3) = \lim_{z \to -3} g_1(z) = \frac{3}{7}$$

und

$$\operatorname{Res}(f, 4) = \lim_{z \to 4} g_2(z) = \frac{4}{7}.$$

b) Definiere $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und betrachte $f : D \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{\sin(z) - z}{z^3}$. Dann ist f holomorph und mit der Potenzreihe der Sinusfunktion folgt

$$f(z) = \frac{\sin(z) - z}{z^3} = \frac{1}{z^3} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} - z \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2(n-1)}$$

für alle $z \in D$. Also ist f durch eine Potenzreihe gegeben, die auf ganz $\mathbb{C}$ konvergiert. Damit ist 0 eine hebbare Singularität von f und f wird durch $f(0) = -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}$ holomorph auf $\mathbb{C}$ fortgesetzt.

c) Definiere $D = \mathbb{C} \setminus \{ib, -ib\}$ und betrachte die Funktion

$$f : D \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1}{(z^2+b^2)^2} = \frac{1}{(z-\mathrm{i}b)^2(z+\mathrm{i}b)^2}.$$

Offensichtlich ist f holomorph. Die Funktionen $g_1 : B(\mathrm{i}b, b) \to \mathbb{C}$, $g_1(z) = \frac{1}{(z+\mathrm{i}b)^2}$ und $g_2 : B(-\mathrm{i}b, b) \to \mathbb{C}$, $g_2(z) = \frac{1}{(z-\mathrm{i}b)^2}$ sind holomorph mit $g_1(\mathrm{i}b) = -\frac{1}{4b^2} \neq 0$ und $g_2(-\mathrm{i}b) = -\frac{1}{4b^2} \neq 0$. Da $f(z) = (z-\mathrm{i}b)^{-2}g_1(z)$ für alle $z \in B(\mathrm{i}b, b)$ und $f(z) = (z+\mathrm{i}b)^{-2}g_2(z)$ für alle $z \in B(-\mathrm{i}b, b)$ gelten, besitzt f Pole zweiter Ordnung in ib und $-ib$. Mit der Formel aus Lemma 2.24 erhalten wir

$$\operatorname{Res}(f, \mathrm{i}b) = \lim_{z\to \mathrm{i}b} g_1'(z) = \lim_{z\to \mathrm{i}b} \frac{-2}{(z+\mathrm{i}b)^3} = -\frac{\mathrm{i}}{4b^3}$$

und

$$\operatorname{Res}(f, -\mathrm{i}b) = \lim_{z\to -\mathrm{i}b} g_2'(z) = \lim_{z\to -\mathrm{i}b} \frac{-2}{(z-\mathrm{i}b)^3} = \frac{\mathrm{i}}{4b^3}.$$

d) Definiere $D = \mathbb{C} \setminus \{ib, -ib\}$ und betrachte die Funktion

$$f : D \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{z}{(z^2+b^2)^2} = \frac{z}{(z-\mathrm{i}b)^2(z+\mathrm{i}b)^2}.$$

Die Funktion $z \mapsto z$ im Zähler hat keine Nullstellen in $\{ib, -ib\}$ und somit liegen Pole zweiter Ordnung in ib und $-ib$ von f wie in Teil c) vor. Wir definieren jetzt $g_1 : B(\mathrm{i}b, b) \to \mathbb{C}$, $g_1(z) = \frac{z}{(z+\mathrm{i}b)^2}$ und $g_2 : B(-\mathrm{i}b, b) \to \mathbb{C}$, $g_2(z) = \frac{z}{(z-\mathrm{i}b)^2}$ und erhalten mit der Formel aus Lemma 2.24

$$\operatorname{Res}(f, \mathrm{i}b) = \lim_{z\to \mathrm{i}b} g_1'(z) = \lim_{z\to \mathrm{i}b} \frac{(z+\mathrm{i}b)^2 - 2z(z+\mathrm{i}b)}{(z+\mathrm{i}b)^4} = 0$$

und

$$\operatorname{Res}(f, -\mathrm{i}b) = \lim_{z\to -\mathrm{i}b} g_2'(z) = \lim_{z\to -\mathrm{i}b} \frac{(z-\mathrm{i}b)^2 + 2z(z-\mathrm{i}b)}{(z-\mathrm{i}b)^4} = 0.$$

e) Definiere $D = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ und betrachte $f : D \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{\mathrm{e}^{1/z}}{(z-1)^2}$. Dann ist f holomorph. Die Funktion $g : B(1, 1) \to \mathbb{C}$, $g(z) = \mathrm{e}^{1/z}$ ist holomorph, $g(1) = \mathrm{e} \neq 0$ und es gilt $f(z) = (z-1)^{-2}g(z)$ für alle $z \in B(1, 1)$. Also hat f also einen Pol der Ordnung 2 in 1. Mit der Formel in Lemma 2.24 erhalten wir

$$\operatorname{Res}(f, 1) = \lim_{z\to 1} g'(z) = \lim_{z\to 1} -\mathrm{e}^{1/z}z^{-2} = -\mathrm{e}.$$

In 0 hat f eine wesentliche Singularität, denn wegen

$$f(\tfrac{1}{n}) = \frac{\mathrm{e}^n}{(1/n-1)^2} \to \infty \qquad \text{und} \qquad f(-\tfrac{1}{n}) = \frac{\mathrm{e}^{-n}}{(-1/n-1)^2} \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty$$

liegt in 0 weder eine hebbare Singularität noch ein Pol vor.

f) Definiere $D = \mathbb{C} \setminus \{0, -\pi, \pi\}$ und betrachte $f : D \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{\sin z}{z^3 - \pi^2 z} = \frac{\sin z}{z(z-\pi)(z+\pi)}$. Dann ist f holomorph. Da $\frac{\sin z}{z}$ eine hebbare Singularität in 0 besitzt, hat auch f eine hebbare Singularität in 0 und durch $f(0) = -\frac{1}{\pi^2}$ wird f holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{-\pi, \pi\}$ fortgesetzt. Außerdem gilt $\lim\limits_{z \to \pi} \frac{\sin z}{z - \pi} = \lim\limits_{z \to \pi} \frac{-\sin(z-\pi)}{z-\pi} = -1$ und $\lim\limits_{z \to -\pi} \frac{\sin z}{z+\pi} = \lim\limits_{z \to -\pi} \frac{-\sin(z+\pi)}{z+\pi} = -1$. Nach Theorem 2.18a) sind also auch die Singularitäten in $-\pi$ und π hebbar und man erhält durch $f(-\pi) = -\frac{1}{2\pi^2}$ und $f(\pi) = -\frac{1}{2\pi^2}$ eine holomorphe Fortsetzung von f auf ganz $\mathbb{C}$.

g) Definiere $D = \mathbb{C} \setminus \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ und betrachte $f : D \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{e^{iz}}{1 - \cos z}$. Dann ist f holomorph, denn die Gleichung $\cos z = 1$ wird genau für $z \in \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ gelöst[1]. Sei $k \in \mathbb{Z}$. Die Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g(z) = e^{iz}$ ist holomorph und es gilt $g(2k\pi) = 1 \neq 0$ und $g'(2k\pi) = i$. Für alle $z \in B(2k\pi, \pi)$ gilt $1 - \cos z = \frac{\sin^2(z)}{1+\cos(z)}$. Da $\sin^2$ eine Nullstelle der Ordnung 2 in $2k\pi$ hat, folgt, dass f eine Polstelle der Ordnung 2 in $2k\pi$ hat. Um den Beginn der Laurentreihe zu berechnen, erhalten wir durch Potenzreihenentwicklung

$$\frac{e^{iz}}{1-\cos(z)} = \frac{e^{i(z-2k\pi)}}{1-\cos(z-2k\pi)} = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!}(z-2k\pi)^n}{-(z-2k\pi)^2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(z-2k\pi)^{2(n-1)}}$$

für alle $z \in B(2k\pi, \pi)$. Um die Potenzreihendarstellung des Quotienten zu berechnen, ist es möglich, einen Koeffizientenvergleich durchzuführen. Alternativ kann man auch so vorgehen wir in Aufgabe 2 b). Wir suchen die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-2k\pi)^n$, die

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!}(z-2k\pi)^n = -\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-2k\pi)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2(n+1))!}(z-2k\pi)^{2n}\right)$$

erfüllt. Ausmultiplizieren liefert

$$1 + i(z-2k\pi) - \frac{1}{2}(z-2k\pi)^2 \ldots = \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2}a_1(z-2k\pi) + \left(\frac{1}{2}a_2 - \frac{1}{4}a_0\right)(z-2k\pi)^2 \ldots$$

und somit $a_0 = 2$, $a_1 = 2i$, $a_2 = 0$, usw. Der Beginn der Laurentreihe lautet also $\frac{2}{(z-2k\pi)^2} + \frac{2i}{z-2k\pi} + \ldots$ und somit gilt $\operatorname{Res}(f, 2k\pi) = 2i$.

h) Definiere $D = \mathbb{C} \setminus \left(\left\{\frac{1}{k\pi} : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\} \cup \{0\}\right)$ und betrachte $f : D \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{\sin(1/z)}$. Dann ist f holomorph. Sei $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und setze $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $g(z) = \sin(1/z)$. Es gilt $g'(z) = -z^{-2}\cos(1/z)$ und somit $g'(\frac{1}{k\pi}) = (-1)^{k+1}(k\pi)^2 \neq 0$. Somit hat g im Punkt $\frac{1}{k\pi}$ eine Nullstelle der Ordnung 1, also hat f bei $\frac{1}{k\pi}$ einen Pol Ordnung der Ordnung 1. Wir berechnen mit der Formel aus Lemma 2.24

$$\operatorname{Res}(f, \frac{1}{k\pi}) = \lim_{z \to \frac{1}{k\pi}} \frac{z - \frac{1}{k\pi}}{\sin(1/z)} = \lim_{z \to \frac{1}{k\pi}} \frac{1}{-\cos(1/z)z^{-2}} = \frac{(-1)^{k+1}}{k^2\pi^2}.$$

[1] Aus $\cos(z) = 1$ folgt $\sin^2(z) = 1 - \cos^2(z) = 0$, alle Nullstellen des Sinus wurden in Aufgabe 1, Blatt bestimmt.

Die Pole bei $\frac{1}{k\pi}$ häufen sich in 0. Also liegt in 0 keine isolierte Singularität von f vor. $\square$

Aufgabe 2 (Laurentreihen)

a) Bestimme die Laurentreihenentwicklung um 0 für die Funktionen $z \mapsto \dfrac{1}{z(z+1)}$ und $z \mapsto \dfrac{z-1}{z^2(z+1)}$.

b) Bestimme den Hauptteil $\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} z^{-k}$ der Laurentreihe um 0 von $z \mapsto \dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{z^2}}$.

c) Man kann Laurentreihen nicht nur auf punktierten Mengen $B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ betrachten sondern auch auf Kreisringen. Zum Beispiel erhält man für die geometrische Reihe die Entwicklung

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n,$$

die für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$ (genau dann gilt nämlich $|z^{-1}| < 1$) konvergiert.

Seien $D = \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$ und $f : D \to \mathbb{C}$ durch $f(z) = \dfrac{1}{1-z^2}$ gegeben. Bestimme eine Darstellung von f als Laurentreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ mit Entwicklungspunkt $z_0 = 2$, die im Kreisring $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z-2| < 3\}$ konvergiert.

Lösungsvorschlag.

a) Sei $z \in B(0,1) \setminus \{0\}$. Mit der geometrischen Reihe folgt die Laurententwicklung

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(z+1)} &= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = \sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^{n+1} z^n \\ &= z^{-1} - 1 + z - z^2 + z^3 - z^4 + z^5 - \dots .\end{aligned}$$

Im zweiten Beispiel folgt ebenfalls mit der geometrischen Reihe die Laurententwicklung

$$\begin{aligned}\frac{z-1}{z^2(z+1)} = \frac{1}{z^2} - \frac{2}{z^2(z+1)} &= \frac{1}{z^2} - \frac{2}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = \frac{1}{z^2} - 2 \sum_{n=-2}^{\infty} (-1)^n z^n \\ &= -z^{-2} + 2\big(z^{-1} - 1 + z - z^2 + z^3 - z^4 + z^5 - \dots\big).\end{aligned}$$

b) Wir setzen $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $h(z) = 1 - \mathrm{e}^{z^2}$. Es gilt $h(0) = 0$, $h'(0) = 0$ und $h''(0) = -2 \neq 0$. Somit hat h eine Nullstelle zweiter Ordnung in 0. Es folgt, dass f einen Pol zweiter Ordnung in 0 besitzt. Betrachte nun $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $g(z) = \frac{z^2}{1-\mathrm{e}^{z^2}}$. Die Funktion g hat dann eine hebbare Singularität in 0, da man den Pol zweiter Ordnung durch Multiplikation mit z^2 zum Verschwinden bringt. Um die Laurententwicklung von f

zu erhalten, muss man die Taylorentwicklung von g bestimmen. Zunächst erhält man aus der Taylorentwicklung der Exponentialfunktion

$$\begin{aligned}g(z) &= \frac{z^2}{1-\mathrm{e}^{z^2}}\\ &= \frac{z^2}{1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{2n}}\\ &= -\frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{2(n-1)}}\\ &= -\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^4+\frac{1}{24}z^6+\dots}.\end{aligned}$$

Bezeichnet man die Funktion im Nenner als $n:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $n(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{2(n-1)}$, so erhält man $n(0)=1$, $n'(0)=0$, $n''(0)=1$, … und damit

$$g(0) = -\frac{1}{n(0)} = -1,$$

$$g'(0) = -\frac{n'(0)}{n(0)^2} = 0$$

und

$$g''(0) = -\frac{n''(0)n(0)^2-2n'(0)^2n(0)}{n(0)^4} = -1.$$

Damit beginnt die Taylorentwicklung von g um 0 mit $-1+0\cdot z-\frac{1}{2}z^2+\dots$ und es folgt, dass die Laurententwicklung von f um 0 mit $-z^{-2}+0\cdot z^{-1}-\frac{1}{2}+\dots$ beginnt.

c) Für alle $z\in\mathbb{C}\setminus\{-1,1\}$ gilt

$$\frac{1}{1-z^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-z}+\frac{1}{1+z}\right).$$

Mit der geometrischen Reihe können wir nun $z\mapsto\frac{1}{1+z}$ in eine Potenzreihe entwicklen, die auf $B(2,3)$ konvergiert und $z\mapsto\frac{1}{1-z}$ in eine Laurentreihe, die auf der Menge $\mathbb{C}\setminus\bar{B}(2,1)$. Beide Entwicklungen zusammen ergeben dann eine Laurentreihe von f, die auf dem Kreisring $B(2,3)\cap\mathbb{C}\setminus\bar{B}(2,1)=\{z\in\mathbb{C}:\ 1<|z-2|<3\}$ konvergiert. Genauer erhält man für alle $z\in B(2,3)$ die Entwicklung

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{z-2}{3})} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}(z-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n3^{-n+1}(z-2)^n.$$

Für alle $z\in\mathbb{C}\setminus\bar{B}(2,1)$ erhält man

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{1-\frac{-1}{z-2}} = -\frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{n+1}(z-2)^n.$$

Insgesamt ergibt sich daher

$$\frac{1}{1-z^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-2)^n,$$

für alle $z \in \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z-2| < 3\}$, wobei die Koeffizienten a_n durch

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(-1)^n 3^{-n+1}, & n \in \mathbb{N}_0, \\ \frac{1}{2}(-1)^{n+1}, & n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0, \end{cases}$$

gegeben sind. $\square$

Aufgabe 3 wird nicht gemeinsam in der Übung besprochen sondern ist als Hausaufgabe zum Selbststudium gedacht. Dabei sollen auch wichtige Begriffe und Techniken aus Analysis 1[2] *zum uneigentlichen Riemann-Integral wiederholt werden.*

Aufgabe 3 (Fresnel-Integrale)
Ziel dieser Aufgabe ist es, die Berechnung der *Fresnel-Integrale*

$$\int_0^\infty \cos(t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\sqrt{2\pi} \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \sin(t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}$$

nachzuvollziehen.

a) Zeige, dass die uneigentlichen Integrale $\int_0^\infty \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$ und $\int_0^\infty \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$ konvergieren.
Wiederholung: Lies Definition 6.31 a) (und rekursiv alle Definitionen von Begriffen die in dieser Definition vorkommen). Konvergenz des uneigentlich Integrals bedeutet, dass man zeigen muss, dass der Grenzwert $\lim_{R\to\infty} \int_0^R \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$ existiert. Um dies zu bewerkstelligen, muss man $\int_0^R \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$ besser verstehen. Es bietet sich folgende Vorgehensweise an: Substituiere $s = t^2$, teile das entstehende Integral in die Teile $\int_0^1$ und $\int_1^{R^2}$ auf. Beachte, dass das erste Integral $\int_0^1$ nun auch ein uneigentliches Integral ist, und man die Existenz von $\lim_{r\to 0} \int_r^1$ untersuchen muss. Lies das zentrale Beispiel 6.33 b). Wende dieses Beispiel zusammen mit dem Majorantenkriterium in Satz 6.34 a) auf die vorliegenden Integrale an. Beim ersten Integral funktioniert dies direkt, beim zweiten Integral muss man zuvor noch partiell integrieren. Im Beispiel 6.35 b) kann man sich Hilfe für diese Vorgehensweise holen.

b) Sei $R > 0$. Sei γ_R ein geschlossener Weg, der aus dem Zusammenfügen der folgenden Teilwege besteht: $\gamma_{R,1}$ ist die Verbindungsstrecke von 0 nach R, $\gamma_{R,2}$ ist der Kreisbogen von R nach $R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ und $\gamma_{R,3}$ ist die Verbindungsstrecke von $R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ nach 0. Das von γ umschlossene Gebiet sieht wie ein Tortenstück aus. Gib möglichst einfache Parametrisierungen für die Teilwege $\gamma_{R,1}$, $\gamma_{R,2}$ und $\gamma_{R,3}$ an.

c) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}$ gegeben. Berechne $\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z$ mit Cauchys Integralsatz.

d) Gib eine Formel für $\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z$ durch direktes Einsetzen der drei Teilwege an.

e) Im letzten Schritt folgert man die Behauptung durch die Betrachtung von $R \to \infty$. Dazu ist folgendes zu tun.

  (i) Zeige, dass der Real- beziehungsweise Imaginärteil von $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_{R,1}} f(z)\,\mathrm{d}z$ den gesuchten Fresnel-Integralen entspricht.

  (ii) Zeige, dass man $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_{R,3}} f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ erhält, wenn man das *Gaußsche Fehlerintegral* $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$ als bekannt voraussetzt.

  (iii) Es bleibt nur noch $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_{R,3}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ zu zeigen. Zeige dazu die Abschätzung $\left|\int_{\gamma_{R,3}} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \int_0^{\pi/4} R\mathrm{e}^{-R^2\sin(s)}\,\mathrm{d}s$, wobei Aufgabe 1 b), Blatt 2, die Substitutionsregel und die Symmetrien der Sinusfunktion eingehen. Schließe daraus die Behauptung mit der Abschätzung $\sin(s) \geq \frac{1}{2}s$ für $s \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

[2] Die in dieser Aufgabe genannten Referenzen auf Definitionen und Sätze beziehen sich auf das Analysis 1-Skriptum von Prof. Schnaubelt.

Lösungsvorschlag.

a) Sei $R > 1$. Mit der Substitution $s = t^2$ und partieller Integration berechnen wir

$$\begin{aligned}\int_0^R \cos(t^2)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_0^{R^2} \cos(s)s^{-1/2}\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \cos(s)s^{-1/2}\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\int_1^{R^2} \cos(s)s^{-1/2}\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \cos(s)s^{-1/2}\,\mathrm{d}s + \frac{1}{4}\int_1^{R^2} \sin(s)s^{-3/2}\,\mathrm{d}s + \frac{\sin(R^2)}{2R} - \frac{\sin(1)}{2}.\end{aligned}$$

Laut Beispiel 6.33b), Analysis 1, konvergieren die uneigentlichen Riemann-Integrale $\int_0^1 s^{-1/2}\,\mathrm{d}s$ und $\int_1^\infty s^{-3/2}\,\mathrm{d}s$. Das Majorantenkriterium 6.34a) und die Abschätzungen $\left|\cos(s)s^{-1/2}\right| \leq s^{-1/2}$ für alle $s \in (0,1]$ sowie $\left|\sin(s)s^{-3/2}\right| \leq s^{-3/2}$ für alle $s \in [1,\infty)$ zeigen, dass die uneigentlichen Integrale $\int_0^1 \cos(s)s^{-1/2}\,\mathrm{d}s$ und $\int_1^\infty \sin(s)s^{-3/2}\,\mathrm{d}s$ konvergieren. Außerdem gilt $\lim_{R\to\infty} \frac{\sin(R^2)}{2R} = 0$, sodass aus obiger Rechung die Existenz des uneigentlichen Integrals $\int_0^\infty \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$ folgt.

Für das Integral $\int_0^\infty \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$ argumentiert man analog.

b) Sei $R > 0$. Wir setzen $\gamma_{R,1}(t) = t$ für $t \in [0,R]$, $\gamma_{R,2} = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ für $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$ und $\gamma_{R,3}^-(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}t$ für $t \in [0,R]$.

c) Sei $R > 0$. Die Funktion f ist holomorph und der Weg γ_R ist geschlossen und stückweise C^1. Cauchys Integralsatz und die Additivität des Kurvenintegrals liefern somit

$$0 = \int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_{R,1}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_{R,2}} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_{R,3}} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

d) Durch Einsetzen der Parametrisierungen aus Teil c) erhalten wird

$$\begin{aligned}0 &= \int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{\gamma_{R,1}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_{R,2}} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_{R,3}} f(z)\,\mathrm{d}z \qquad (\star) \\ &= \int_0^R \mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi/4} \mathrm{e}^{\mathrm{i}R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}} R\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\int_0^R \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

e) Als erstes stellen wir fest, dass nach Teil a) und d)

$$\lim_{R\to\infty} \mathrm{Re}\int_{\gamma_{R,1}} f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \cos(t^2)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$$

und

$$\lim_{R\to\infty} \mathrm{Im}\int_{\gamma_{R,1}} f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \sin(t^2)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$$

gelten. Aus der Symmetrie der Quadratfunktion folgt $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Wegen $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$ erhält man daher

$$\lim_{R\to\infty} \mathrm{Re}\int_{\gamma_{R,3}} f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{R\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^R \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$$

und
$$\lim_{R\to\infty} \operatorname{Im} \int_{\gamma_{R,3}} f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{R\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^R \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$
Außerdem berechnen wir
$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_{R,2}} f(z)\,\mathrm{d}z\right| &= \left|\int_0^{\pi/4} \mathrm{e}^{\mathrm{i}R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}} R\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t\right| \\ &\le \int_0^{\pi/4} R\mathrm{e}^{-R^2\sin(2t)}\,\mathrm{d}t \\ &\le \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} R\mathrm{e}^{-R^2\sin(s)}\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^{\pi/4} R\mathrm{e}^{-R^2\sin(s)}\,\mathrm{d}s,\end{aligned}$$
wobei wir die Standardabschätzung für das komplexe Integral, die Formel $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\operatorname{Re} z}$, die Substitution $s = 2t$ sowie die Formel $\sin(\pi/2 - 2) = \sin(s)$ für $s \in [0, \frac{\pi}{4}]$ verwendet haben. Mit der Abschätzung $\sin(s) \ge \frac{1}{2}s$ für $s \in [0, \frac{\pi}{4}]$ erhalten wir daraus schließlich
$$\left|\int_{\gamma_{R,2}} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \int_0^{\pi/4} R\mathrm{e}^{-R^2 s/2}\,\mathrm{d}s = \frac{2}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-R^2\pi/8}\right) \to 0$$
für $R \to \infty$. Der Grenzübergang $R \to \infty$ in der Gleichung ($\star$) führt also zu
$$\int_0^\infty \cos(t^2)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \sin(t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2\pi}}{4},$$
wie behauptet. $\square$