Karlsruher Institut für Technologie

3. Juni 2019
Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Andreas Geyer-Schulz

Analysis für das Lehramt
Lösungsvorschlag zum 6. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Anwendung des Residuensatzes)
Berechne die folgenden Integrale mit dem Residuensatz.

a) $\displaystyle\int_{\partial B(0,2)} \frac{\mathrm{e}^z}{(z-1)(z+3)^2}\,\mathrm{d}z$

b) $\displaystyle\int_{\partial B(0,9)} \frac{\mathrm{e}^z}{(z-1)(z+3)^2}\,\mathrm{d}z$

c) $\displaystyle\int_{\partial B(0,1)} \frac{z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-1}\,\mathrm{d}z$

d) $\displaystyle\int_{\partial B(0,2)} \frac{z^3}{z^2+1}\,\mathrm{d}z$

Lösungsvorschlag.

a) Definiere $f : \mathbb{C}\setminus\{1,-3\} \to \mathbb{C}$ durch $f(z) = \frac{\mathrm{e}^z}{(z-1)(z+3)^2}$. Man erkennt unmittelbar, dass f einen Pol erster Ordnung in 1 und einen Pol zweiter Ordnung in -3 besitzt. Wir berechnen mit der Formel aus Lemma 2.24

$$\operatorname{Res}(f,1) = \lim_{z\to 1} \frac{\mathrm{e}^z}{(z+3)^2} = \frac{\mathrm{e}}{16}$$

und

$$\operatorname{Res}(f,-3) = \lim_{z\to -3} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{\mathrm{e}^z}{z-1}\right) = \lim_{z\to -3} \frac{z\mathrm{e}^z - 2\mathrm{e}^z}{(z-1)^2} = -\frac{5\mathrm{e}^{-3}}{16}.$$

Der Weg $\partial B(0,2)$ umläuft 1 einmal in Gegenuhrzeigersinn und er umläuft keinmal -3. Daher erhalten wir aus dem Residuensatz

$$\int_{\partial B(0,2)} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}(f,1) = \frac{\pi\mathrm{e}}{8}\mathrm{i}.$$

b) Mit den Rechnungen aus Teil a) liefert der Residuensatz

$$\int_{\partial B(0,9)} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\big(\operatorname{Res}(f,1) + \operatorname{Res}(f,-3)\big) = \frac{\pi(\mathrm{e}-5\mathrm{e}^{-3})}{8}\mathrm{i}.$$

c) Definiere $f : \mathbb{C}\setminus\{2\pi k : k\in\mathbb{Z}\} \to \mathbb{C}$ durch $f(z) = \frac{z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-1}$. Aus der Potenzreihenentwicklung $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-1 = z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathrm{i}^n z^{n-1}$ für alle $z\in\mathbb{C}$, erkennt man, dass f eine hebbare Singularität in 0 besitzt. Folglich gilt $\operatorname{Res}(f,0) = 0$. Die anderen Singularitäten bei $2\pi k$ für $k\in\mathbb{Z}\setminus\{1\}$ werden nicht vom Integrationsweg $\partial B(0,1)$ unlaufen und spielen daher keine Rolle. Der Residuensatz liefert

$$\int_{\partial B(0,1)} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}(f,0) = 0.$$

Selbstverständlich folgt dieses Ergebnis auch aus Cauchys Integralsatz.

d) Definiere $f : \mathbb{C}\setminus\{\mathrm{i},-\mathrm{i}\} \to \mathbb{C}$ durch $f(z) = \frac{z^3}{z^2+1}$. Man erkennt sofort, dass f Pole erster Ordnung in i und $-$i besitzt. Wir berechnen mit der Formel aus Lemma 2.24

$$\operatorname{Res}(f,\mathrm{i}) = \lim_{z\to\mathrm{i}} \frac{z^3}{z+\mathrm{i}} = -\frac{1}{2}$$

und

$$\operatorname{Res}(f, -\mathrm{i}) = \lim_{z \to -\mathrm{i}} \frac{z^3}{z - \mathrm{i}} = -\frac{1}{2}.$$

Der Residuensatz liefert

$$\int_{\partial B(0,2)} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\big(\operatorname{Res}(f, \mathrm{i}) + \operatorname{Res}(f, -\mathrm{i})\big) = -2\pi\mathrm{i}.$$

Mit einer anderen Methode wurde dieses Ergebnis auch in Aufgabe 1 e), Blatt 4, erzielt. □

Aufgabe 2 (Berechnung reeller Integrale, Teil 1)
Berechne die folgenden Integrale mit der Methode aus Beispiel 2.25.

a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1 + \sin(t)^2}\,\mathrm{d}t.$

b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(t)^2}{a + \cos(t)}\,\mathrm{d}t, \quad \text{wobei } a > 1.$

Lösungsvorschlag.

a) Für $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ gilt die Identität $\sin(t) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}} = \frac{z - z^{-1}}{2\mathrm{i}}$. Daraus folgt $\sin(t)^2 = -\frac{z^4 - 2z^2 + 1}{4z^2}$ und somit

$$\frac{1}{1 + \sin^2(t)} = -\frac{4z^2}{z^4 - 6z^2 + 1}.$$

Definiert man $f : \mathbb{C} \setminus \left\{\pm\sqrt{3 \pm 2\sqrt{2}}\right\} \to \mathbb{C}$ durch

$$f(z) = \frac{4\mathrm{i}z}{z^4 - 6z^2 + 1} \quad \left(= -\frac{4z^2}{z^4 - 6z^2 + 1} \cdot \frac{1}{\mathrm{i}z} \right),$$

so gilt $f(\gamma(t))\gamma'(t) = \frac{1}{1 + \sin(t)^2}$ für $t \in [-\pi, \pi]$ und den Weg $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [-\pi, \pi]$. Die einzigen Singularitäten von f in $B(0,1)$ lauten $\pm\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$, dort liegt jeweils ein Pol erster Ordnung vor. Mit der Formel aus Lemma 2.24 berechnen wir

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(f, \pm\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}\right) &= \lim_{z \to \pm\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}} \left(z \mp \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}\right) \frac{4\mathrm{i}z}{z^4 - 6z^2 + 1} \\
&= \frac{4\mathrm{i}z}{4z^3 - 12z}\bigg|_{z = \pm\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}} \\
&= -\frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Der Residuensatz liefert das Ergebnis

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1 + \sin(t)^2}\,\mathrm{d}t &= \int_{\partial B(0,1)} f(z)\,\mathrm{d}z \\
&= 2\pi\mathrm{i}\left(\operatorname{Res}\left(f, \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}\right) + \operatorname{Res}\left(f, -\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}\right)\right) \\
&= \sqrt{2}\pi.
\end{aligned}$$

b) Wie in Teil a) verwenden wir für $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ die Identitäten $\sin(t)^2 = -\frac{(z^2-1)^2}{4z^2}$ und $\cos(t) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2} = \frac{z^2+1}{2z}$. Wir erhalten daraus die Identität

$$\frac{\sin(t)^2}{a+\cos(t)} = -\frac{(z^2-1)^2}{2z((z+a)^2+1-a^2)}.$$

Wie in Teil a) definieren wir also $f : \mathbb{C} \setminus \{0, -a \pm \sqrt{a^2-1}\} \to \mathbb{C}$ durch

$$f(z) = \mathrm{i}\frac{(z^2-1)^2}{2z^2((z+a)^2+1-a^2)}.$$

Diese Definition führt gerade auf $f(\gamma(t))\gamma'(t) = \frac{\sin(t)^2}{a+\cos(t)}$ für $t \in [-\pi, \pi]$ und den Weg $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [-\pi, \pi]$. Nur die Singularitäten 0 (ein Pol zweiter Ordnung) und $-a + \sqrt{a^2-1}$ (ein einfacher Pol) werden vom Integrationsweg γ umlaufen. Wir setzen im folgenden zur Abkürzung $z_a = -a + w$, $\tilde{z}_a = -a - w$ und $w = \sqrt{a^2-1}$. Mit der Formel aus Lemma 2.24 berechnen wir

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f,0) &= \lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(z^2 f(z)\right) \\
&= \lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{i}}{2} \cdot \frac{4(z^2-1)z((z+a)^2+1-a^2) - 2(z^2-1)^2(z+a)}{((z+a)^2+1-a^2)^2} \\
&= -\mathrm{i}a
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f,z_a) &= \lim_{z\to z_a} (z-z_a)f(z) \\
&= \frac{\mathrm{i}}{2} \cdot \left.\frac{(z^2-1)^2}{2z^2(z+a)}\right|_{z=z_a} \\
&= \mathrm{i}\frac{(z_a^2-1)^2}{4z_a^2 w}.
\end{aligned}$$

Um den letzten Term weiter zu vereinfachen, verwenden wir die Gleichung

$$z_a\tilde{z}_a = (-a+w)(-a-w) = a^2 - w^2 = 1.$$

Damit erhalten wir

$$\mathrm{i}\frac{(z_a^2-1)^2}{4z_a^2 w} = \mathrm{i}\frac{(z_a^2-1)^2\tilde{z}_a^2 w}{4(a^2-1)} = \mathrm{i}\frac{(z_a-\tilde{z}_a)^2 w}{4(a^2-1)} = \mathrm{i}w = \mathrm{i}\sqrt{a^2-1}.$$

Der Residuensatz liefert das Ergebnis

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(t)^2}{a+\cos(t)}\,\mathrm{d}t &= \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \\
&= 2\pi\mathrm{i}(\operatorname{Res}(f,0) + \operatorname{Res}(f,z_a)) \\
&= 2\pi\left(a - \sqrt{a^2-1}\right).
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 3 (Berechnung reller Integral, Teil 2)
Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \pi,$$

da man die Stammfunktion *arctan* des Integranden kennt. Man kann dieses Ergebnis auch mit den Mitteln der Funktionentheorie auf folgende Art erhalten. Sei $R > 1$. Betrachte den geschlossenen Weg $\gamma_R = \gamma_{1,R} \cup \gamma_{2,R}$ mit $\gamma_{1,R}(t) = t$, $t \in [-R, R]$ und $\gamma_{2,R} = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, \pi]$. Der Residuensatz angewandt auf die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$, $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ zeigt

$$\int_{-R}^{R} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{1+R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}}\,\mathrm{d}t = \int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}(f, \mathrm{i}) = \pi.$$

Das Ergebnis folgt im Grenzwert $R \to \infty$, da

$$\int_{-R}^{R} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \to \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

und

$$\left|\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{1+R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^{\pi} \frac{R}{|1+R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}|}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{\pi} \frac{R}{R^2-1}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi R}{R^2-1} \to 0$$

für $R \to \infty$ gelten.
Berechne mit der gleichen Methode

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t.$$

Lösungsvorschlag. Definiere $f : \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{e}^{1/4\pi\mathrm{i}}, \mathrm{e}^{3/4\pi\mathrm{i}}, \mathrm{e}^{5/4\mathrm{i}\pi}, \mathrm{e}^{7/4\pi\mathrm{i}}\} \to \mathbb{C}$ durch $f(z) = \frac{1+z^2}{1+z^4}$. Sei $R > 1$. Der Weg γ_R sei wie in der Aufgabenstellung gegeben. Die Definition des Kurvenintegrals einerseits und der Residuensatz andererseits zeigen

$$\begin{aligned}\int_{-R}^{R} \frac{1+t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi} \frac{(1+R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t})\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{1+R^4\mathrm{e}^{4\mathrm{i}t}}\,\mathrm{d}t &= \int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z \\ &= 2\pi\mathrm{i}\Big(\mathrm{Res}(f, \mathrm{e}^{1/4\pi\mathrm{i}}) + \mathrm{Res}(f, \mathrm{e}^{3/4\pi\mathrm{i}})\Big).\end{aligned}$$

Da der Nenner von f vier verschiedene Nullstellen hat, liegt jeweils ein Pol erster Ordnung vor. Wir berechnen mit der Formel aus Lemma 2.24

$$\mathrm{Res}(f, \mathrm{e}^{1/4\pi\mathrm{i}}) = \lim_{z \to \mathrm{e}^{1/4\pi\mathrm{i}}} (z - \mathrm{e}^{1/4\pi\mathrm{i}})\frac{1+z^2}{1+z^4} = \frac{1+\mathrm{e}^{1/2\pi\mathrm{i}}}{4\mathrm{e}^{3/4\pi\mathrm{i}}} = \frac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{e}^{1/4\pi\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-3/4\pi\mathrm{i}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{i}.$$

und

$$\mathrm{Res}(f, \mathrm{e}^{3/4\pi\mathrm{i}}) = \lim_{z \to \mathrm{e}^{3/4\pi\mathrm{i}}} (z - \mathrm{e}^{3/4\pi\mathrm{i}})\frac{1+z^2}{1+z^4} = \frac{1+\mathrm{e}^{3/2\pi\mathrm{i}}}{4\mathrm{e}^{9/4\pi\mathrm{i}}} = \frac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{e}^{-1/4\pi\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-1/4\pi\mathrm{i}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{i}.$$

Aus

$$\int_{-R}^{R} \frac{1+t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t \to \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$$

und

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\pi \frac{(1+R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t})\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{1+R^4\mathrm{e}^{4\mathrm{i}t}}\,\mathrm{d}t\right| &\leq \int_0^\pi \frac{\left|1+R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}\right|R}{\left|1+R^4\mathrm{e}^{4\mathrm{i}t}\right|}\,\mathrm{d}t \\ &\leq \int_0^\pi \frac{(1+R^2)R}{R^4-1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi(1+R^2)R}{R^4-1} \to 0\end{aligned}$$

für $R \to \infty$ erhalten wir insgesamt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\pi.$$

Wir haben dabei in der entscheidenden Abschätzung die Dreieckungleichung wie folgt verwendet. Mit $a = -1$ und $b = 1 + R^4\mathrm{e}^{4\mathrm{i}t}$ gilt

$$R^4 = |a+b| \leq |a| + |b| = 1 + \left|1 + R^4\mathrm{e}^{4\mathrm{i}t}\right|,$$

woraus die Abschätzung

$$R^4 - 1 \leq \left|1 + R^4\mathrm{e}^{4\mathrm{i}t}\right|$$

folgt. □