Karlsruher Institut für Technologie

10. Juni 2019
Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Andreas Geyer-Schulz

Analysis für das Lehramt
Lösungsvorschlag zum 7. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Jordaninhalt eines Dreiecks)
Sei Δ ein Dreieck mit Seitenlängen a, b, c und Winkeln α, β, γ, wobei der Winkel α zwischen den Seiten mit Längen b und c liege. Führe ein geeignetes Koordinatensystem ein und beschreibe Δ als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$. Zeige, dass Δ quadrierbar ist und folgere aus den Eigenschaften in Satz 3.4 die Formel

$$\operatorname{vol}(\Delta) = \tfrac{1}{2} bc \sin(\alpha).$$

Lösungsvorschlag. Wir beschreiben Δ als Dreieck mit den Eckpunkten $A = (0,0)$, $B = (c,0)$ und $C = (c\cos(\alpha), c\sin(\alpha))$. Wir definieren die Halbebenen

$$\begin{aligned}
H_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, y \geq 0\},\\
H_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, \cos(\alpha)x - \sin(\alpha)y \leq 0\},\\
H_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, (c-x)b\sin(\alpha) + (b\cos(\alpha) - c)y \geq 0\}.
\end{aligned}$$

Es gilt $\Delta = H_1 \cap H_2 \cap H_3$. Für $i = 1,2,3$ ist der Rand von H_i jeweils als Graph einer linearen Funktion gegeben. Nach Beispiel 3.2 und Satz 3.3 sind die Mengen H_1, H_2 und H_3 jeweils quadrierbar. Nach Satz 3.4 a) ist damit auch Δ quadrierbar, denn es ist ein Durchschnitt von quadrierbaren Mengen.

Wir betrachten nun den Quader $Q = [0,1]^2$, welcher per Definition quadrierbar ist. Dieser Quader hat die Ecken 0, $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ und $(1,1)$. Definiere $T = \begin{pmatrix} c & b\cos(\alpha) \\ 0 & b\sin(\alpha) \end{pmatrix}$. Dann gilt $T(0) = A$, $Te_1 = B$, $Te_2 = C$ und $T(1,1) = (c + b\cos(\alpha, b\sin(\alpha))) = B + C$. Das Bild von Q unter der linearen Abbildung T ist folglich ein Parallelogram mit den Ecken A, B, $B + C$, C. Nach Satz 3.4 f) ist diese Menge $T(Q)$ quadrierbar und es gilt $\operatorname{vol}(T(Q)) = |\det(T)| \operatorname{vol}(Q) = cb\sin(\alpha)$. Außerdem betrachten wir die affine Abbildung

$$S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad S\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b\cos(\alpha) + c \\ b\sin(\alpha) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Man rechnet leicht nach, dass $S(A) = D$, $S(B) = C$ und $S(C) = B$ gilt. Sei Δ_2 das Dreieck mit den Ecken B, D, C. Es gilt also $S(\Delta) = \Delta_2$. Nach Satz 3.4 f) ist also auch Δ_2 quadrierbar und es gilt $\operatorname{vol}(\Delta_2) = |\det(-I)| \operatorname{vol}(\Delta) = \operatorname{vol}(\Delta)$. Schließlich haben wir $\Delta_1 \cup \Delta_2 = T(Q)$ und $\Delta^\circ \cap \Delta_2^\circ = \emptyset$. Aus Satz 3.4 d) folgt daher $\operatorname{vol}(\Delta) + \operatorname{vol}(\Delta_2) = \operatorname{vol}(T(Q)) = bc\sin(\alpha)$. Wegen $\operatorname{vol}(\Delta_2) = \operatorname{vol}(\Delta)$ erhält man daraus die Behauptung. $\square$

Aufgabe 2 (Satz von Fubini)
Berechne die folgenden Integrale mit dem Satz von Fubini.

a) $\displaystyle\int_{[1,2]\times[1,2]} \frac{2y}{x+y^2} \, \mathrm{d}(x,y)$

b) $\displaystyle\int_{[0,\pi]\times[0,1]} x^2 \sin(xy) \, \mathrm{d}(x,y)$

c) $\displaystyle\int_{[-1,1]\times[0,1]} x \mathrm{e}^{(x^2-1)y^2} \, \mathrm{d}(x,y)$

d) $\displaystyle\int_{[1,2]\times[2,3]\times[0,2]} \frac{2z}{(x+y)^2} \, \mathrm{d}(x,y,z)$

e) $\int_0^1 \left(\int_y^1 \mathrm{e}^{x^2}\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$

f) $\int_0^1 \left(\int_y^{y^2+1} x^2 y \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$

Lösungsvorschlag. In den Aufgabenteilen a) bis d) ist das Integrationsgebiet jeweils ein Quader. Die Voraussetzung des Satz von Fubini an die Schnittmengen ist in dieser Situation immer erfüllt. Außerdem sind in den Beispielen alle Integranden auf dem abegschlossenen Integrationsgebiet stetig. Der Satz von Fubini kann also direkt angewendet werden und man hat die Auswahl, in welcher Reihenfolge man die iterierten Integrale berechnet. Wenn man bei einem Versuch nicht weiterkommt, weil man keine Stammfunktion bestimmen kann, so sollte man die Rechnung nochmal mit umgekehrter Integrationsreihenfolge versuchen. Zum Beispiel scheint es vorteilhaft zu sein, wenn man in Beispiel b) zuerst nach y integriert, in Beispiel c) jedoch zuerst nach x.

a) Wir berechnen mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}
\int_{[1,2]\times[1,2]} \frac{2y}{x+y^2}\, \mathrm{d}(x,y) &= \int_1^2 \left(\int_1^2 \frac{2y}{x+y^2}\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_1^2 \Big[\log(x+y^2) \Big]_{y=1}^2 \, \mathrm{d}x \\
&= \int_1^2 \log(x+4) - \log(x+1)\, \mathrm{d}x \\
&= \big[(x+4)\log(x+4) - (x+1)\log(x+1) \big]_1^2 \\
&= 6\log(6) - 3\log(3) - 5\log(5) + 2\log(2) \\
&= 8\log(2) + 3\log(3) - 5\log(5).
\end{aligned}$$

b) Wir berechnen mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}
\int_{[0,\pi]\times[0,1]} x^2 \sin(xy)\, \mathrm{d}(x,y) &= \int_0^\pi \left(\int_0^1 x^2 \sin(xy)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^\pi -\big[x\cos(xy) \big]_{y=0}^1 \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^\pi x - x\cos(x)\, \mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi^2}{2} + \int_0^\pi \sin(x)\, \mathrm{d}x - \big[x\sin(x) \big]_0^\pi \\
&= \frac{\pi^2}{2} + 2.
\end{aligned}$$

c) Wir berechnen mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}
\int_{[-1,1]\times[0,1]} x\mathrm{e}^{(x^2-1)y^2}\, \mathrm{d}(x,y) &= \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 x\mathrm{e}^{(x^2-1)y^2}\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{2y^2}\mathrm{e}^{(x^2-1)y^2} \right]_{x=-1}^1 \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2y^2} - \frac{1}{2y^2}\, \mathrm{d}y \\
&= 0.
\end{aligned}$$

d) Wir berechnen mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}\int_{[1,2]\times[2,3]\times[0,2]} \frac{2z}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}(x,y,z) &= \left(\int_0^2 2z\,\mathrm{d}z\right)\int_1^2 \left(\int_2^3 \frac{1}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\ &= 4\int_1^2 -\left[\frac{1}{x+y}\right]_{y=2}^3 \mathrm{d}x\\ &= 4\int_1^2 \frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\,\mathrm{d}x\\ &= 4\big[\log(x+2)-\log(x+3)\big]_1^2\\ &= 4\log(4)-4\log(5)-4\log(3)+4\log(4)\\ &= 16\log(2)-4\log(5)-4\log(3).\end{aligned}$$

e) Definiere

$$\Delta = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\, 0\le y\le 1, y\le x\le 1\}.$$

Dann ist Δ ein Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$ und $(1,1)$. (Skizze!) Insbesondere ist Δ quadrierbar nach Aufgabe 1. Für jedes $y\in[0,1]$ ist der Schnitt Δ_y durch $\Delta_y=[y,1]$ gegeben[1]. Nach dem Satz von Fubini gilt also

$$\int_0^1 \left(\int_y^1 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_\Delta \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}(x,y).$$

Wir möchten nun die Integrationsreihenfolge vertauschen, weil wir keine Stammfunktion von $x\mapsto \mathrm{e}^{x^2}$ kennen. Sei $x\in\mathbb{R}$. Für $x<0$ oder $x>1$ gilt $\Delta^x=\emptyset$. Für $x\in[0,1]$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\Delta^x &= \{y\in\mathbb{R} :\, (x,y)\in\Delta\}\\ &= \{y\in\mathbb{R} :\, 0\le y\le 1, y\le x\le 1\}\\ &= \{y\in\mathbb{R} :\, 0\le y\le x\}\\ &= [0,x].\end{aligned}$$

Es ist lohnend, sich an der Skizze von Δ klarzumachen, wie man hier die Integrationsreihenfolge von horizontalen zu vertikalen Streifen vertauscht. Der Satz von Fubini liefert nun

$$\int_\Delta \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}(x,y) = \int_0^1\left(\int_0^x \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

und wir können somit

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\int_y^1 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y &= \int_0^1\left(\int_0^x \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}\right]_0^1\\ &= \frac{1}{2}(\mathrm{e}-1).\end{aligned}$$

ausrechnen.

[1] Und für $y<0$ oder $y>1$ gilt $\Delta_y=\emptyset$.

f) Es spricht vermutlich nichts dagegen, die iterierten Integrale direkt auszurechnen. Zur Übung wollen wir jedoch die Integrationsreihenfolge vertauschen. Die Ungleichungen

$$0 \leq y \leq 1, \quad y \leq x \quad \text{und} \quad x \leq y^2 + 1$$

sind äquivalent zu

$$0 \leq x \leq 2, \quad y \leq \min\{x, 1\} \quad \text{und} \quad y \geq \max\{\sqrt{x-1}, 0\}$$

Für $x \in [0,1]$ lautet der vertikale Schnitt bei x durch das Integrationsgebiet also $[0, x]$, für $x \in [1,2]$ erhält man $[\sqrt{x-1}, 1]$. Der Satz von Fubini erlaubt hier wieder die Vertauschung der Integrationsreihenfolge und wir erhalten

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\int_y^{y^2+1} x^2 y \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y &= \int_0^1 \left(\int_0^x x^2 y \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + \int_1^2 \left(\int_{\sqrt{x-1}}^1 x^2 y \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2} \left[x^2 y^2 \right]_{y=0}^x \mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{1}{2} \left[x^2 y^2 \right]_{y=\sqrt{x-1}}^1 \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2} x^4 \,\mathrm{d}x + \int_1^2 x^2 - \frac{1}{2} x^3 \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{10} + \frac{8}{3} - \frac{1}{3} - 2 + \frac{1}{8} \\
&= \frac{67}{120}.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 3 (Inhaltsberechnung)
Berechne den Jordaninhalt der folgenden Mengen. Falls die Menge in $\mathbb{R}^2$ liegt, skizziere sie.

a) $V_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{4}x^2 - 1 < y < 2 - x \right\}$

b) $V_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0,\ y^2 < x < 4 - y^2 \right\}$

c) $V_3 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y^2 \leq z^3 \leq x \right\}$

d) $V_4 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq z \leq x^2 - y^2 \right\}$

Lösungsvorschlag.

a) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $V_1^x = \left\{ y \in \mathbb{R} : \frac{1}{4}x^2 - 1 < y < 2 - x \right\}$. Wegen $\frac{1}{4}x^2 + x - 3 = \frac{1}{4}(x-2)(x+6)$ gilt $V_1^x \neq \emptyset$ genau dann wenn $x \in (-6, 2)$. In diesem Fall gilt $\mathrm{vol}(V_1^x) = 3 - x - \frac{1}{4}x^2$. Damit erhalten wir aus dem Prinzip von Cavlieri

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(V_1) &= \int_{-6}^2 \mathrm{vol}(V_1^x) \,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-6}^2 3 - x - \frac{1}{4}x^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \left[3x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^3 \right]_{-6}^2 \\
&= 21 + \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

b) Für jedes $y \in \mathbb{R}$ mit $y > 0$ gilt $(V_2)_y = \{x \in \mathbb{R} : \, y^2 < x < 4 - y^2\}$. In diesem Fall ist $(V_2)_y \neq \emptyset$ genau dann wenn $y \in (0, \sqrt{2})$ und es gilt $\operatorname{vol}\big((V_2)_y\big) = 4 - 2y^2$. Damit erhalten wir aus dem Prinzip von Cavalieri

$$\begin{aligned} \operatorname{vol}(V_2) &= \int_0^{\sqrt{2}} \operatorname{vol}\big((V_2)_y\big) \, \mathrm{d}y \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} 4 - 2y^2 \, \mathrm{d}x \\ &= \left[4x - \frac{2}{3} y^3\right]_0^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{8}{3}\sqrt{2}. \end{aligned}$$

c) Wir iterieren das Prinzip von Cavalieri. Es gilt

$$(x, y, z) \in V_3 \iff 0 \leq x \leq 1, \; 0 \leq z \leq x^{1/3} \quad \text{und} \quad -z^{3/2} \leq y \leq z^{3/2}.$$

Man muss bei einer solchen Umformung aufpassen, dass man zum Beispiel beim Wurzelziehen alle Lösungen angibt, also hier $|y| \leq z^{3/2}$ statt $0 \leq y \leq z^{3/2}$. Wenn man die Menge in die obige Form gebracht hat, kann man direkt mit Fubini losrechnen

$$\begin{aligned} \operatorname{vol}(V_3) &= \int_0^1 \int_0^{x^{1/3}} \int_{-z^{3/2}}^{z^{3/2}} 1 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \int_0^{x^{1/3}} 2z^{3/2} \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left[\frac{4}{5} z^{5/2}\right]_{z=0}^{x^{1/3}} \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{4}{5} x^{5/6} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{11} = \frac{24}{55}. \end{aligned}$$

d) Wie in Teil c) formen wir die Bedinungen so um, dass man die Grenzen der iterierten Integral direkt ablesen kann. Es gilt

$$(x, y, z) \in V_4 \iff 1 \leq x \leq 2, \; -x \leq y \leq x \quad \text{und} \quad 0 \leq z \leq x^2 - y^2.$$

Wir erhalten daraus

$$\begin{aligned} \operatorname{vol}(V_4) &= \int_1^2 \int_{-x}^{x} \int_0^{x^2 - y^2} 1 \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\ &= \int_1^2 \int_{-x}^{x} x^2 - y^2 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\ &= \int_1^2 2x^3 - \frac{2}{3} x^3 \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}(16 - 1) = 5. \end{aligned}$$

□