Analysis für das Lehramt

Lösungsvorschlag zum 8. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Polar- und Kugelkoordinaten)

a) Sei $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < \sqrt{x^2+y^2} < 2,\ 0 < y < x\right\}$. Berechne $\int_B \frac{y}{x}\,\mathrm{d}(x,y)$.

b) Berechne

$$\int_{B(0,1)} \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}(x,y,z).$$

c) Berechne das Volumen der Menge

$$B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2 \le x^2+y^2+z^2 \le 4,\ \sqrt{\tfrac{x^2+y^2}{3}} \le z \le \sqrt{x^2+y^2}\right\}.$$

Lösungsvorschlag.

a) Wir führen Polarkoordinaten $(x,y) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$ ein. Es gilt $r = \sqrt{x^2+y^2}$, woraus die Bedingung $1 < r < 2$ folgt. Aus $0 < y < x$ erhalten wir $0 < \sin(\varphi) < \cos(\varphi)$ und somit $0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$. Wir erhalten also $B = \Phi_2(A)$ mit $A = \left\{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 : r \in (1,2),\ \varphi \in (0,\frac{\pi}{4})\right\}$ und Φ_2 ist auf A injektiv. Mit dem Transformationssatz und Fubini berechnen wir

$$\begin{aligned}
\int_B \frac{y}{x}\,\mathrm{d}(x,y) &= \int_A \frac{r\sin(\varphi)}{r\cos(\varphi)} r\,\mathrm{d}(r,\varphi) \\
&= \int_1^2 \int_0^{\pi/4} \tan(\varphi) r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\
&= \big[-\log(\cos(\varphi))\big]_0^{\pi/4} \left[\tfrac{1}{2}r^2\right]_1^2 \\
&= \frac{1}{2}\log(2)\frac{3}{2} = \frac{3}{4}\log(2).
\end{aligned}$$

b) Wir berechnen direkt mit den Kugelkoordinaten Φ_3 aus Beispiel 3.20, dem Transformationssatz und Fubini

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,1)} \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{1+r^2} r^2 \cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\
&= 2\pi \int_0^1 1 - \frac{1}{1+r^2}\,\mathrm{d}r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= 4\pi\big(1 - \arctan(1)\big) \\
&= 4\pi\big(1 - \tfrac{\pi}{4}\big) = 4\pi - \pi^2.
\end{aligned}$$

c) Wie in Teil b) verwenden wir Kugelkoordinaten $(x,y,z) = \Phi_3(r,\varphi,\theta)$. Aus $x^2 + y^2 + z^2$ erhält man direkt die Bedingung $\sqrt{2} \le r \le 2$. Wegen $x^2+y^2 = r^2\cos^2(\theta)$ erhält man ferner die Bedinung

$$\sqrt{\frac{r^2\cos^2(\theta)}{3}} \le r\sin(\theta) \le \sqrt{r^2\cos^2(\theta)}$$

und somit $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq \tan(\theta) \leq 1$. Hierbei ist zu beachten, dass wegen $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ stets $\cos(\theta) \geq 0$ gilt. Wir erhalten damit $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ insgesamt $B = \Phi_3(A)$ für

$$A = \left\{(r, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^3 : \, r \in [\sqrt{2}, 2], \varphi \in [-\pi, \pi], \theta \in [\tfrac{\pi}{6}, \tfrac{\pi}{4}]\right\}.$$

Mit dem Transformationssatz und Fubini erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(B) &= \int_A r^2 \cos(\theta) \, \mathrm{d}(r, \varphi, \theta) \\
&= \int_{\sqrt{2}}^{2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\pi/6}^{\pi/4} r^2 \cos(\theta) \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi \left[\frac{1}{3} r^3\right]_{\sqrt{2}}^{2} \Big[\sin(\theta)\Big]_{\pi/6}^{\pi/4} \\
&= \frac{1}{3}\pi(8 - 2\sqrt{2})(\sqrt{2} - 1) = \frac{1}{3}\pi(10\sqrt{2} - 12).
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 2 (Zylinderkoordinaten)

a) Die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei definiert durch $\Phi(r, \varphi, z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$. Zeige $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, $\Phi([0, \infty) \times [-\pi, \pi] \times \mathbb{R}) = \mathbb{R}^3$ und Φ ist auf $(0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$ injektiv. Berechne ferner $\det \Phi'(r, \varphi, z)$.

b) Seien $h > 0$ und $0 < \rho < R$. Der *Hohlzylinder* Z_1 ist definiert durch

$$Z_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \, 0 \leq z \leq h, \; \rho \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R\right\},$$

der *Halbzylinder* Z_2 ist definiert durch

$$Z_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \, 0 \leq z \leq h, \; 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R, \; y \geq 0\right\}.$$

Berechne $\mathrm{vol}(Z_1)$ und $\mathrm{vol}(Z_2)$.

c) Berechne das Integral $\int_{Z_1} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \, \mathrm{d}(x, y, z)$.

Lösungsvorschlag.

a) Die Abbildung Φ ist offensichtlich stetig differenzierbar. Sei $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Nach Beispiel 3.19 gibt es 2-dimensionale Polarkoordinaten $(r, \varphi) \in [0, \infty) \times [-\pi, \pi]$ so, dass $(x, y, z) = \Phi(r, \varphi, z)$ gilt. Also gilt $\Phi([0, \infty) \times [-\pi, \pi] \times \mathbb{R}) = \mathbb{R}^3$. Ebenso ist die Abbildung $(r, \varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ auf der Menge $(0, \infty) \times (-\pi, \pi)$ injektiv, also ist auch Φ injektiv auf $(0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$. Schließlich gilt für alle $(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\det \Phi'(r, \varphi, z) = \det \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r.$$

b) Die Mengen Z_1, Z_2 sind beschränkt und abgeschlossen und somit quadrierbar. Wir verwenden die Zylinderkoordinaten Φ wie in Teil a). Es gilt $Z_1 = \Phi(A)$, wobei $A = [\rho, R] \times [-\pi, \pi] \times [0, h]$ ist. Nach a) ist Φ auf A° injektiv und somit liefert der Transformationssatz und Fubini

$$\operatorname{vol}(Z_1) = \int_A r \,\mathrm{d}(r, \varphi, z) = \int_0^h \int_{-\pi}^{\pi} \int_\rho^R r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}z = \pi h(R^2 - \rho^2).$$

Ferner gilt $Z_2 = \Phi(B)$, mit $B = [0, R] \times [0, \pi] \times [0, h]$. Wie eben liefert der Transformationssatz in Kombination mit Fubini

$$\operatorname{vol}(Z_2) = \int_B r \,\mathrm{d}(r, \varphi, z) = \int_0^h \int_0^\pi \int_0^R r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}z = \tfrac{1}{2}\pi h R^2.$$

Alternativ kann man in diesem Beispiel auch wie folgt argumentieren. Nach dem Prinzip von Cavalieri gilt $\operatorname{vol}(Z_{r,h}) = \operatorname{vol}(\overline{Z}_{r,h}) = \pi h r^2$, wobei $Z_{r,h}$ den offenen Zylinder der Höhe h und Radius r bezeichne. Die erste Behauptung folgt dann aus der Additivität des Jordaninhalts und der Zerlegung $\overline{Z}_{R,h} = Z_1 \dot\cup Z_{\rho,h}$. Für die zweite Behauptung verwendet man die Bewegungsinvarianz des Jordaninhalts unter der linearen Abbildung $S = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und erhält $2\operatorname{vol}(Z_2) = \operatorname{vol}(Z_2) + \operatorname{vol}(SZ_2) = \operatorname{vol}(Z_{R,h}) - \operatorname{vol}(\{y = 0\}) = \pi h R^2$.

c) Wie in Teil b) gilt $Z_1 = \Phi(A)$. Die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ ist stetig und auf der beschränkten Menge Z_1 beschränkt, also integrierbar. Mit dem Transformationssatz in Verbindung mit Fubini berechnen wir

$$\begin{aligned}
\int_{Z_1} f \,\mathrm{d}\lambda_3 &= \int_A f(\Phi(r, \varphi, z)) \left|\det(\Phi'(r, \varphi, z))\right| \,\mathrm{d}(r, \varphi, z) \\
&= 2\pi \int_0^h \int_\rho^R \tfrac{z}{\sqrt{r^2+z^2}} r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}z \\
&= 2\pi \int_0^h z \left[\sqrt{r^2 + z^2}\right]_{r=\rho}^{r=R} \mathrm{d}z \\
&= 2\pi \int_0^h z\sqrt{R^2 + z^2} - z\sqrt{\rho^2 + z^2} \,\mathrm{d}z \\
&= \tfrac{2}{3}\pi \left[(R^2 + z^2)^{3/2}\right]_{z=0}^{z=h} - \tfrac{2}{3}\pi \left[(\rho^2 + z^2)^{3/2}\right]_{z=0}^{z=h} \\
&= \tfrac{2}{3}\pi\big((R^2 + h^2)^{3/2} - R^3 + \rho^3 - (\rho^2 + h^2)^{3/2}\big).
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 3 (Volumen klassischer geometrischer Körper)
Im folgenden werden klassische Körper im $\mathbb{R}^3$ beschrieben. Bestimme jeweils ihr Volumen.

a) Die *Steinmetz-Körper* entstehen als Schnitt von zwei beziehungsweise drei senkrechten Kreiszylindern mit Radius $R > 0$, deren Achsen sich jeweils orthogonal schneiden.

b) Der *Vivianische Körper* ensteht als Schnitt der Kugel um 0 mit Radius R und dem Zylinder $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 < Rx\}$.

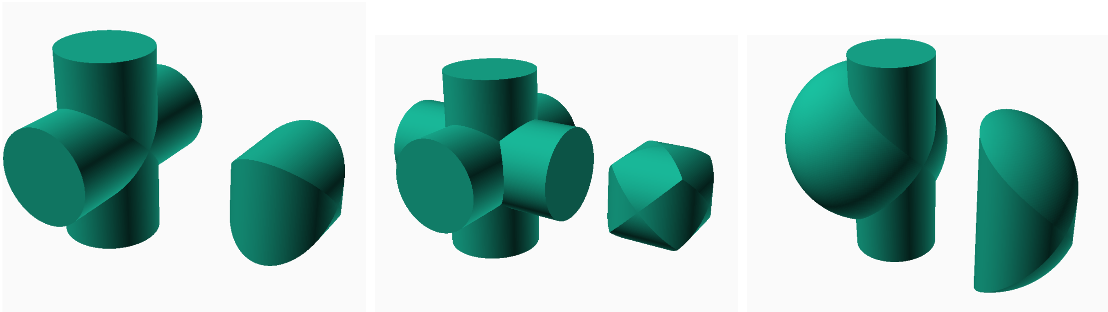

Abbildung 1: Die Steinmetz- und der Vivianische Körper

Lösungsvorschlag.

a) Wir betrachten die drei Zylinder

$$\begin{aligned} Z_1 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2+z^2 \le R^2\right\}, \\ Z_2 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+z^2 \le R^2\right\}, \\ Z_3 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le R^2\right\} \end{aligned}$$

und die Steinmetz[1]-Körper

$$S_1 = Z_1 \cap Z_2 \quad \text{sowie} \quad S_2 = Z_1 \cap Z_2 \cap Z_3.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} S_1 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2+z^2 \le R^2,\ x^2+z^2 \le R^2\right\} \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |z| \le R, |y| \le \sqrt{R^2-z^2},\ |x| \le \sqrt{R^2-z^2}\right\}. \end{aligned}$$

Mit anderen Worten, für festes $z \in [-R,R]$ ist der Schnitt durch S_1 auf Höhe z ein Quadrat mit Seitenlänge $2\sqrt{R^2-z^2}$. Wir berechnen daher mit Fubini (oder dem Prinzip von Cavalieri)

$$\begin{aligned} \operatorname{vol}(S_1) &= \int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-z^2}} \int_{-\sqrt{R^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-z^2}} 1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{-R}^{R} 4(R^2-z^2)\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{16}{3}R^3. \end{aligned}$$

Es gilt

$$S_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2+z^2 \le R^2,\ x^2+z^2 \le R^2,\ x^2+y^2 \le R^2\right\}.$$

[1] Charles P. Steinmetz, 1865–1923, Elektroingenieur

Für $z \in (\frac{\sqrt{2}}{2}R, R)$ gilt also $(x,y,z) \in S_2$ genau dann wenn

$$|y| \leq \sqrt{R^2 - z^2} \quad \text{und} \quad |x| \leq \min\{\sqrt{R^2-z^2}, \sqrt{R^2-y^2}\} = \sqrt{R^2-z^2}.$$

Wir erhalten also wie bei S_1, dass der Steinmetz-Körper S_2 eine Kappe K besitzt, deren Schnitte in z-Richtung Quadrate sind. Wie oben erhalten wir

$$\operatorname{vol}(K) = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}R}^{R} 4(R^2 - z^2)\,\mathrm{d}z = \frac{8-5\sqrt{2}}{3}R^3.$$

Aus Symmetriegründen und der Bewegungsinvarianz des Jordaninhalts können wir nun das Volumen von S_2 durch als Summe der Volumina des Würfels $[-\frac{\sqrt{2}}{2}R, \frac{\sqrt{2}}{2}R]^3$ und von sechs Kappen K beschreiben, also

$$\operatorname{vol}(S_2) = 2\sqrt{2}R^3 + 6 \cdot \frac{8-5\sqrt{2}}{3}R^3 = (16 - 8\sqrt{2})R^3. \qquad \square$$

b) Der Vivianische[2] Körper ist durch

$$V = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, \; x^2 + y^2 \leq Rx\Big\}$$

gegeben. Wegen $x^2 + y^2 \leq Rx \iff (x - R/2)^2 + y^2 \leq (R/2)^2$ gilt $V = \overline{B}(0,R) \cap \Big(\overline{B}((R/2,0),R/2) \times \mathbb{R}\Big)$, d.h., V ist der Schnitt einer Kugel und eines Zylinders. Jedenfalls ist V beschränkt und abgeschlossen und somit quadrierbar. Wir verwenden Zylinderkoordinaten wie in Aufgabe 2. Setzt man $(x,y,z) = \Phi(r,\varphi,z)$ in die definierenden Bedingungen der Menge V ein, so erhält man die Ungleichungen $r^2 + z^2 \leq R^2$ und $r^2 \leq Rr\cos\varphi$. Aus der letzten Bedingung folgt $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$ und weiter $r \in [0, R\cos\varphi]$. Die erste Bedingung liefert noch $z \in [-\sqrt{R^2-r^2}, \sqrt{R^2-r^2}]$. Insgesamt gilt also $V = \Phi(A)$, mit

$$A = \Big\{(r,\varphi,z) \in \mathbb{R}^3 : \, \varphi \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}], r \in [0, R\cos\varphi], z \in [-\sqrt{R^2-r^2}, \sqrt{R^2-r^2}]\Big\}.$$

Die Menge A ist beschränkt und abgeschlossen also ebenfalls quadrierbar. Ferner ist ihr Inneres A° durch

$$A^\circ = \Big\{(r,\varphi,z) \in \mathbb{R}^3 : \, \varphi \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}), r \in (0, R\cos\varphi), z \in (-\sqrt{R^2-r^2}, \sqrt{R^2-r^2})\Big\}$$

gegeben. Die Abbildung Φ ist auf A° injektiv mit $\det \Phi'(r,\varphi,z) \neq 0$ für $(r,\varphi,z) \in A^\circ$.

[2] Vincenzo Viviani, 1622–1703, Mathematiker und Physiker

Mit dem Transformationssatz und Fubini berechnen wir schließlich

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(V) &= \int_A r \,\mathrm{d}(r,\varphi,z) \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{R\cos\varphi} \int_{-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}} r \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{R\cos\varphi} 2r\sqrt{R^2-r^2} \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi \\
&= -\tfrac{2}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Big[(R^2-r^2)^{3/2}\Big]_0^{R\cos\varphi} \,\mathrm{d}\varphi \\
&= \tfrac{2}{3}\pi R^3 - \tfrac{2}{3}R^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin(\varphi)|^3 \,\mathrm{d}\varphi \\
&= \tfrac{2}{3}\pi R^3 - \tfrac{4}{3}R^3 \int_0^{\pi/2} \sin\varphi(1-\cos^2\varphi) \,\mathrm{d}\varphi \\
&= \tfrac{2}{3}\pi R^3 - \tfrac{4}{3}R^3\big([-\cos(\varphi)]_0^{\pi/2} + [\tfrac{1}{3}\cos^3\varphi]_0^{\pi/2}\big) \\
&= \tfrac{2}{3}\pi R^3 - \tfrac{4}{3}R^3(1-\tfrac{1}{3}) = (\tfrac{2\pi}{3} - \tfrac{8}{9})R^3.
\end{aligned}$$