Karlsruher Institut für Technologie

24. Juni 2019
Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Andreas Geyer-Schulz

Analysis für das Lehramt

Lösungsvorschlag zum 9. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Vermischte Aufgaben zur mehrdimensionalen Integration)
Berechne die folgenden Integrale.

a) $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \sqrt{x^2+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

b) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{1-(1-x)^2}} \frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

c) $\int_{[0,\pi]\times[-\pi/2,2\pi]} (y\sin(x)+x\sin(y))\,\mathrm{d}(x,y)$

d) $\int_D \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}(x,y)$, wobei $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2 \le x^2+y^2 \le 2y\}$.

e) $\mathrm{vol}(D)^{-1}\int_D z\,\mathrm{d}(x,y,z)$, wobei D die Halbkugel $B(0,R)\cap\{z\ge 0\}$ für ein $R>0$ ist. (Das Ergebnis ist die z-Koordinate des Schwerpunkts der homogenen Halbkugel.)

f) $\int_D \frac{1}{x+6}\,\mathrm{d}(x,y)$, wobei D die Fläche zwischen der y-Achse und der Kurve $\gamma(t) = (t-t^3, 2t-t^2)$ für $t\in[0,1]$ ist.

g) $\int_{[0,1]\times[0,1]} x\mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}(x,y)$

h) $\int_D xyz\,\mathrm{d}(x,y,z)$, wobei $D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x,y\ge 0,\ x^2+y^2\le z\le 1\}$.

Lösungsvorschlag.

a) Um die mühsame Berechnung der Stammfunktion von $x \mapsto \sqrt{x^2+y}$ zu vermeiden, wollen wir die Integrationsreihenfolge vertauschen. Dazu definieren wir $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le 4,\ \sqrt{y}\le x\le 2\}$. Da D beschränkt und abgeschlossen und $f : D\to\mathbb{R}$, $f(x,y) = \sqrt{x^2+y}$ stetig ist, ist der Satz von Fubini anwendbar. Umformen der Bedingungen in D ergibt

$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 2,\ 0\le y\le x^2\right\}$$

und wir berechnen mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}
\int_0^4\int_{\sqrt{y}}^2 \sqrt{x^2+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^2\int_0^{x^2}\sqrt{x^2+y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{3}\int_0^2 \left[(x^2+y)^{3/2}\right]_{y=0}^{x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{3}\int_0^2 (2\sqrt{2}-1)x^3\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{8}{3}(2\sqrt{2}-1).
\end{aligned}$$

b) Wir verwenden Polarkoordinaten Φ_2. Setze

$$D = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le \sqrt{1-(1-x)^2}\Big\}.$$

Mit $x = r\cos(\varphi)$ und $y = r\sin(\varphi)$ folgen die Bedingungen

$$0 \le r\cos(\varphi) \le 2$$

und

$$0 \le r\sin(\varphi) \le \sqrt{1-(1-r\cos(\varphi))^2} = \sqrt{2r\cos(\varphi) - r^2\cos(\varphi)^2}.$$

Aus $0 \le \cos(\varphi)$ und $0 \le \sin(\varphi)$ erhält man $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Quadrieren der zweiten Bedinung liefert $r^2\sin(\varphi)^2 \le 2r\cos(\varphi) - r^2\cos(\varphi)^2$, also $r \le 2\cos(\varphi)$. Da $\cos(\varphi) \le 1$, ist die Bedinung $r\cos(\varphi) \le 2$ in diesem Fall immer erfüllt. Wir erhalten also $D = \Phi_2(A)$ mit

$$A = \Big\{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le r \le 2\cos(\varphi)\Big\}.$$

Damit berechnen wir

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \int_0^{\sqrt{1-(1-x)^2}} \frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos(\varphi)} \frac{r\sin(\varphi)}{r^2} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{\pi/2} 2\cos(\varphi)\sin(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \Big[\sin(\varphi)^2\Big]_0^{\pi/2} = 1.
\end{aligned}$$

c) Wir berechnen direkt mit Fubini

$$\begin{aligned}
&\int_{[0,\pi]\times[-\pi/2,2\pi]} (y\sin(x) + x\sin(y))\,\mathrm{d}(x, y) \\
&= \left(\int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-\pi/2}^{2\pi} y\,\mathrm{d}y\right) + \left(\int_0^\pi x\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-\pi/2}^{2\pi} \sin(y)\,\mathrm{d}y\right) \\
&= 2\frac{15}{8}\pi^2 - \frac{1}{2}\pi^2 = \frac{13}{4}\pi^2.
\end{aligned}$$

d) Wir verwenden Polarkoordinaten. Mit $x = r\cos(\varphi)$ und $y = r\sin(\varphi)$ folgen die Bedingungen

$$2 \le r^2 \le 2r\sin(\varphi).$$

Daraus folgt einerseits $\sqrt{2} \le 2\sin(\varphi)$ und andererseits $\sqrt{2} \le r \le 2\sin(\varphi)$. Die erste Bedingung liefert daher $\varphi \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi]$. Es gilt $D = \Phi_2(A)$ mit

$$A = \Big\{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : \varphi \in [\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{3}{4}\pi],\ r \in [\sqrt{2}, 2\sin(\varphi)]\Big\}.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\int_D \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}(x, y) &= \int_{\pi/4}^{3\pi/4}\int_{\sqrt{2}}^{2\sin(\varphi)} \frac{r^2\cos^2(\varphi)}{r^3} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} 2\sin(\varphi)\cos^2(\varphi) - \sqrt{2}\cos(\varphi)^2\,\mathrm{d}\varphi \\
&= -\frac{2}{3}\Big[\cos(\varphi)^3\Big]_{\pi/4}^{3\pi/4} - \sqrt{2}\left[\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4}\sin(2\varphi)\right]_{\pi/4}^{3\pi/4} = \frac{10-3\pi}{6\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

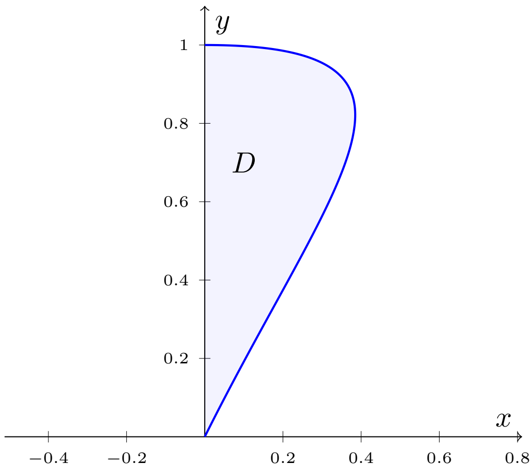

Abbildung 1: Der Weg γ und die Fläche D aus Aufgabe 1 f).

e) Wir verwenden Kugelkoordinaten. Es gilt $D = \Phi_3(A)$ mit

$$A = \{(r, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^3 : r \in [0, R],\ \varphi \in [-\pi, \pi],\ \theta \in [0, \pi/2]\}.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\operatorname{vol}(D)^{-1} \int_D z \,\mathrm{d}(x, y, z) &= \frac{3}{2\pi R^3} \int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi/2} r \sin(\theta) r^2 \cos(\theta) \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r \\
&= \frac{3}{2\pi R^3} 2\pi \frac{1}{4} R^4 \left[-\frac{1}{2} \cos(\theta)^2 \right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{3}{8} R.
\end{aligned}$$

Mit Zylinderkoordinaten kommt man in dieser Aufgabe genauso ans Ziel.

f) In Abbildung 1 ist der Weg γ und die Fläche D gezeigt. Aus $y = 2t - t^2$ erhalten wir $t = 1 - \sqrt{1-y}$, wenn sowohl t als auch y im Intervall $[0, 1]$ liegen. Damit ist dann $\gamma(t) = (t - t^3, 2t - t^2) = ((3 - y)\sqrt{1-y} - 3(1 - y), y)$. Wir erhalten also

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq (3 - y)\sqrt{1-y} - 3(1 - y)\}.$$

Wir berechnen direkt mit Fubini

$$\begin{aligned}
\int_D \frac{1}{x + 6} \,\mathrm{d}(x, y) &= \int_0^1 \int_0^{(3-y)\sqrt{1-y}-3(1-y)} \frac{1}{x + 6} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \Big[\log(x + 6) \Big]_0^{(3-y)\sqrt{1-y}-3(1-y)} \,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \log((3 - y)\sqrt{1-y} + 3y + 3) \,\mathrm{d}y - \log(6).
\end{aligned}$$

Mit der Substitution $t = \sqrt{1-y}$ erhalten wir $y = 1 - t^2$, $\mathrm{d}y = -2t \,\mathrm{d}t$ und

$$\int_0^1 \log((3 - y)\sqrt{1-y} + 3y + 3) \,\mathrm{d}y = \int_0^1 \log(t^3 - 3t^2 + 2t + 6) 2t \,\mathrm{d}t.$$

Partielle Integration und Partialbruchzerlegung führen auf

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \log(t^3 - 3t^2 + 2t + 6) 2t \, \mathrm{d}t \\
&\quad = -\int_0^1 \frac{(3t^2 - 6t + 2)t^2}{(t+1)(t^2 - 4t + 6)} \, \mathrm{d}t + \Big[t^2 \log(t^3 - 3t^2 + 2t + 6) \Big]_0^1 \\
&\quad = -\int_0^1 \frac{(3t^2 - 6t + 2)t^2}{11(t+1)} \, \mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{(3t^2 - 6t + 2)t^2(5-t)}{11(t^2 - 4t + 6)} \, \mathrm{d}t + \log(6).
\end{aligned}$$

Diese gebrochen rationalen Funktionen können nun mit der Standardmethode (Polynomdivision) integriert werden. Wir erhalten

$$-\int_0^1 \frac{(3t^2 - 6t + 2)t^2}{11(t+1)} \, \mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{3}{11} t^3 - \frac{9}{11} t^2 + t - 1 + \frac{1}{t+1} \, \mathrm{d}t = \frac{31}{44} - \log(2)$$

und

$$\begin{aligned}
&-\int_0^1 \frac{(3t^2 - 6t + 2)t^2(5-t)}{11(t^2 - 4t + 6)} \, \mathrm{d}t \\
&\quad = -\int_0^1 -\frac{3}{11} t^3 + \frac{9}{11} t^2 + 2t + 4 + \frac{44t - 264}{11(t^2 - 4t + 6)} \, \mathrm{d}t \\
&\quad = -\frac{229}{44} + \left[8\sqrt{2} \arctan\left(\frac{1}{2} \sqrt{2}(t-2) \right) - 2 \log(t^2 - 4t + 6) \right]_0^1 \\
&\quad = -\frac{229}{44} - 8\sqrt{2} \arctan\left(\frac{1}{2} \sqrt{2} \right) + 8\sqrt{2} \arctan(\sqrt{2}) + 2 \log(2).
\end{aligned}$$

Das Ergebnis lautet somit

$$\begin{aligned}
&\int_D \frac{1}{x+6} \, \mathrm{d}(x,y) \\
&\quad = -8\sqrt{2} \arctan\left(\frac{1}{2} \sqrt{2} \right) + 8\sqrt{2} \arctan(\sqrt{2}) + \log(2) - \frac{9}{2} \\
&\quad \approx 0.0379629113197595 \ldots .
\end{aligned}$$

g) Wir berechnen direkt mit Fubini

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1]\times[0,1]} x\mathrm{e}^{xy} \, \mathrm{d}(x,y) &= \int_0^1 \int_0^1 x\mathrm{e}^{xy} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left[\mathrm{e}^{xy} \right]_{y=0}^1 \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \mathrm{e}^x - 1 \, \mathrm{d}x \\
&= \mathrm{e} - 2.
\end{aligned}$$

h) Wir verwenden Zylinderkoordinaten Φ wie in Aufgabe 2, Blatt 8. Aus $x, y \geq 0$ folgt $\varphi \in [0, \pi/2]$ und aus $x^2 + y^2 \leq z$ folgt $r^2 \leq z$. Wir erhalten also

$$D = \Big\{ (r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 \leq z \leq 1, \ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \ 0 \leq r \leq \sqrt{z} \Big\}.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}\int_D xyz \,\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{z}} r^2 \cos(\varphi)\sin(\varphi) zr \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}z \\ &= \int_0^1 z \left[\frac{1}{4} r^4\right]_{r=0}^{\sqrt{z}} \mathrm{d}z \left[\frac{1}{2}\sin^2(\varphi)\right]_{\varphi=0}^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{8}\int_0^1 z^3 \,\mathrm{d}z = \frac{1}{32}.\end{aligned}$$

□

Aufgabe 2 (Ein Gegenbeispiel)
Man darf die Integrationsreihenfolge bei iterierten Integralen nicht immer vertauschen! Zeige durch direkte Berechnung, dass die iterierten Integrale

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} \,\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y \quad \text{und} \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} \,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x.$$

nicht übereinstimmen. Warum ist der Satz von Fubini nicht anwendbar?

Lösungsvorschlag. Wir berechnen

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} \,\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{1}{2(x+y)^2} \,\mathrm{d}x - \left[\frac{x-y}{2(x+y)^2}\right]_{x=0}^1\right) \mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 -\frac{1}{2(1+y)} + \frac{1}{2y} - \frac{1}{2y} - \frac{1-y}{2(1+y)^2} \,\mathrm{d}y \\ &= -\int_0^1 \frac{1}{2(1+y)} \,\mathrm{d}y + \int_0^1 \frac{1}{2(1+y)} \,\mathrm{d}y + \left[\frac{1-y}{2(1+y)}\right]_{y=0}^1 \\ &= -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Durch Umbenennung der Variablen „$x \to y, y \to x$“, erhält man

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} \,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x &= -\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{y-x}{(y+x)^3} \,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x \\ &= -\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} \,\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Der Satz von Fubini kann nicht angewendet werden, weil die Funktion $f(x,y) = \frac{x-y}{(x+y)^3}$ im Punkt $(0,0)$ singulär ist und f auf $(0,1)^2$ somit unbeschränkt und nicht Riemann-integrierbar ist. □