

Analysis für das Lehramt

Lösungsvorschlag zum 10. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Weitere Aufgaben zur mehrdimensionalen Integration)

a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Vertausche die Integrationsreihenfolge:

$$(i) \int_0^1 \int_0^x f(x, y) \, dy \, dx \qquad (iii) \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sin(y)} f(x, y) \, dx \, dy$$

$$(ii) \int_1^4 \int_{\sqrt{x}}^2 f(x, y) \, dy \, dx \qquad (iv) \int_0^1 \int_{1-y^2}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) \, dx \, dy$$

b) Berechne $\int_{[1,2] \times [2,3] \times [0,2]} \frac{2z}{(x+y)^2} \, d(x, y, z)$.

c) Berechne das Volumen des Körpers zwischen der Ebene $z = x + y$ und dem Rechteck $[0, 1] \times [0, 2] \times \{0\}$.

d) Berechne das Volumen des Körpers zwischen der Fläche $z = xy^2 + y^3$ und dem Quadrat $[0, 2] \times [0, 2] \times \{0\}$.

e) Berechne den Schwerpunkt des Kugeloktanten $B(0, R) \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \geq 0\}$.

f) Berechne die Fläche des Bereichs, der von der *Kardioide*

$$\gamma(t) = ((1 + \cos(t)) \cos(t), (1 + \cos(t)) \sin(t)), \quad t \in [0, 2\pi],$$

umschlossen wird.

g) Sei Z der Zylinder $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$. Berechne das Volumen von $Z \cap B(0, 2R)$.

h) Sei $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$. Zeige für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$ die Formel

$$\int_D x^n y^m \, d(x, y) = \frac{n!m!}{(n+m+2)!}.$$

i) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und strikt positiv. Zeige die Ungleichung

$$(b-a)^2 \leq \left(\int_a^b f(t) \, dt \right) \left(\int_a^b \frac{1}{f(t)} \, dt \right).$$

j) Seien $f, g, p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, p positiv und f, g beide monoton wachsend (oder beide monoton fallend). Zeige die Ungleichung

$$\left(\int_a^b p(t) f(t) \, dt \right) \left(\int_a^b p(t) g(t) \, dt \right) \leq \left(\int_a^b p(t) \, dt \right) \left(\int_a^b p(t) f(t) g(t) \, dt \right).$$

Lösungsvorschlag.

a) (i) Es gilt

$$\int_0^1 \int_0^x f(x, y) \, dy \, dx = \int_0^1 \int_y^1 f(x, y) \, dx \, dy.$$

(ii) Es gilt

$$\int_1^4 \int_{\sqrt{x}}^2 f(x, y) \, dy \, dx = \int_1^2 \int_1^{y^2} f(x, y) \, dx \, dy.$$

(iii) Es gilt

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\sin(y)} f(x, y) \, dx \, dy = \int_0^1 \int_{\arcsin(x)}^{\pi/2} f(x, y) \, dy \, dx.$$

(iv) Es gilt

$$\int_0^1 \int_{1-y^2}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) \, dx \, dy = \int_0^1 \int_{\sqrt{1-x}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) \, dy \, dx.$$

b) Wir berechnen mit Fubini

$$\begin{aligned} \int_{[1,2] \times [2,3] \times [0,2]} \frac{2z}{(x+y)^2} \, d(x, y, z) &= \left(\int_0^2 2z \, dz \right) \left(\int_1^2 \left(\int_2^3 (x+y)^{-2} \, dy \right) \, dx \right) \\ &= 2 \int_1^2 (x+2)^{-1} - (x+3)^{-1} \, dx \\ &= 8 \log(2) - 2 \log(3) - 2 \log(5). \end{aligned}$$

c) Der gesuchte Körper K wird durch

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq x + y\}$$

beschrieben. Es folgt mit Fubini

$$\text{vol}(K) = \int_K 1 \, d(x, y, z) = \int_0^1 \int_0^2 x + y \, dy \, dx = \int_0^1 2x + 2 \, dx = 3.$$

d) Der gesuchte Körper K wird durch

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq xy^2 + y^3\}$$

beschrieben. Es folgt mit Fubini

$$\text{vol}(K) = \int_K 1 \, d(x, y, z) = \int_0^2 \int_0^2 xy^2 + y^3 \, dy \, dx = \int_0^2 \frac{8}{3}x + 4 \, dx = \frac{40}{3}.$$

e) Wir bezeichnen den Kugeloktanten mit K . Aus Symmetriegründen stimmen die x -, y - und z -Koordinate des Schwerpunkts überein. Wir berechnen die z -Koordinate und verwenden dazu Kugelkoordinaten. Das Ergebnis lautet

$$\begin{aligned} \text{vol}(K)^{-1} \int_K z \, d(x, y, z) &= \frac{6}{\pi R^3} \int_0^R \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} r \sin(\theta) r^2 \cos(\theta) \, d\theta \, d\varphi \, dr \\ &= \frac{6}{\pi R^3} \cdot \frac{R^4}{4} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \left[\frac{1}{2} \sin^2(\theta) \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{3}{8} R. \end{aligned}$$

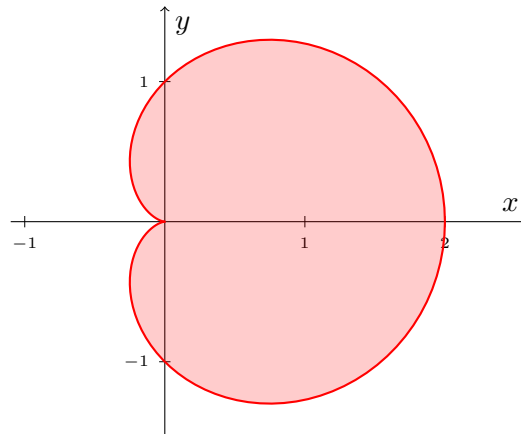


Abbildung 1: Die Kardioide aus Aufgabe 1 f).

f) Wir berechnen die Fläche C mit Polarkoordinaten. Es gilt $C = \Phi_2(A)$ wobei

$$A = \{(r, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1 + \cos(\varphi)\}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \text{vol}(C) &= \int_C 1 \, d(x, y) \\ &= \int_A r \, d(r, \varphi) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos(\varphi)} r \, dr \, d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos(\varphi))^2 \, d\varphi \\ &= \frac{3}{2} \pi. \end{aligned}$$

g) Wir verwenden Kugelkoordinaten. Es gilt $= \Phi_3(A)$ wobei

$$A = \left\{ (r, \varphi, \theta) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq r \leq \min \left\{ 2R, \frac{R}{\cos(\theta)} \right\} \right\}.$$

Dabei ist $\cos(\theta)^{-1} \leq 2 \iff -\pi/3 \leq \theta \leq \pi/3$. Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \text{vol}(Z \cap B(0, 2R)) &= \int_A r^2 \cos(\theta) \, d(r, \varphi, \theta) \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\min\{2R, \frac{R}{\cos(\theta)}\}} r^2 \cos(\theta) \, dr \, d\theta \, d\varphi \\ &= 4\pi \int_0^{\pi/3} \int_0^{\frac{R}{\cos(\theta)}} r^2 \cos(\theta) \, dr \, d\theta + 4\pi \int_{\pi/3}^{\pi/2} \int_0^{2R} r^2 \cos(\theta) \, dr \, d\theta \\ &= \frac{4}{3}\pi R^3 \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos^2(\theta)} \, d\theta + 8\pi R^3 \\ &= \left(\frac{4}{3}\sqrt{3} + 8\right) \pi R^3. \end{aligned}$$

h) Wir berechnen mit dem Satz von Fubini

$$\int_D x^n y^m \, d(x, y) = \int_0^1 x^n \int_0^{1-x} y^m \, dy \, dx = \frac{1}{m+1} \int_0^1 x^n (1-x)^{m+1} \, dx.$$

Wir zeigen die Behauptung nun durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$. Für den Induktionsanfang sei also $n = 0$ und $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Wir erhalten

$$\frac{1}{m+1} \int_0^1 (1-x)^{m+1} \, dx = \frac{1}{(m+1)(m+2)} = \frac{m!}{(m+2)!}.$$

Dies zeigt das gewünschte Ergebnis im Fall $n = 0$. Sei nun $n \in \mathbb{N}_0$. Wir nehmen an, dass die Formel

$$\int_D x^n y^m \, d(x, y) = \frac{1}{m+1} \int_0^1 x^n (1-x)^{m+1} \, dx = \frac{n!m!}{(n+m+2)!}$$

gilt. Unter Verwendung dieser Annahme folgt mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \frac{1}{m+1} \int_0^1 x^{n+1} (1-x)^{m+1} \, dx &= \frac{n+1}{(m+1)(m+2)} \int_0^1 x^n (1-x)^{m+2} \, dx \\ &= \frac{n+1}{m+1} \cdot \frac{n!(m+1)!}{(n+m+3)!} \\ &= \frac{(n+1)!m!}{(n+m+3)!}. \end{aligned}$$

Also liefert das Prinzip der vollständigen Induktion die Behauptung.

i) Mit dem Satz von Fubini folgt

$$\left(\int_a^b f(t) \, dt \right) \left(\int_a^b \frac{1}{f(t)} \, dt \right) = \int_{[a,b]^2} \frac{f(x)}{f(y)} \, d(x, y) = \int_{[a,b]^2} \frac{f(y)}{f(x)} \, d(x, y)$$

Die für alle $t \in (0, \infty)$ geltende Ungleichung $t + t^{-1} \geq 2$ impliziert folglich

$$\begin{aligned} \left(\int_a^b f(t) \, dt \right) \left(\int_a^b \frac{1}{f(t)} \, dt \right) &= \frac{1}{2} \int_{[a,b]^2} \left(\frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)} \right) \, d(x, y) \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{[a,b]^2} 2 \, d(x, y) \\ &= (b-a)^2. \end{aligned}$$

j) Der Satz von Fubini liefert für die linke Seite

$$\begin{aligned} & \left(\int_a^b p(t) f(t) dt \right) \left(\int_a^b p(t) g(t) dt \right) \\ &= \int_{[a,b]^2} p(x)p(y) f(x)g(y) d(x, y) \\ &= \int_{[a,b]^2} p(x)p(y) f(y)g(x) d(x, y) \\ &= \frac{1}{2} \int_{[a,b]^2} p(x)p(y) [f(x)g(y) + f(y)g(x)] d(x, y). \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite erhalten wir ganz ähnlich

$$\begin{aligned} & \left(\int_a^b p(t) dt \right) \left(\int_a^b p(t) f(t) g(t) dt \right) \\ &= \int_{[a,b]^2} p(x)p(y) f(y)g(y) d(x, y) \\ &= \int_{[a,b]^2} p(x)p(y) f(x)g(x) d(x, y) \\ &= \frac{1}{2} \int_{[a,b]^2} p(x)p(y) [f(x)g(x) + f(y)g(y)] d(x, y). \end{aligned}$$

Bildet man die Differenz aus rechter minus linker Seite, so erhält man den Ausdruck

$$\frac{1}{2} \int_{[a,b]^2} p(x)p(y) [f(x) - f(y)] [g(x) - g(y)] d(x, y).$$

Aus der Voraussetzung über die Monotonie von f und g folgt, dass der Integrand überall positiv ist und somit folgt die Behauptung. \square

Aufgabe 2 (Oberfläche eines Rotationskörpers)

Sei $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ stetig differenzierbar. Wir betrachten die Rotationsfläche

$$M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq z \leq b, x^2 + y^2 = f(z)^2 \right\},$$

vgl. auch Bemerkung 3.14 b) für die Diskussion des Volumens von Rotationskörpern.

a) Eine Parametrisierung der geschlitzten Rotationsfläche lautet

$$\Phi : (-\pi, \pi) \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Phi(\varphi, z) = \begin{pmatrix} f(z) \cos(\varphi) \\ f(z) \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass die Oberfläche von M durch

$$\sigma(M) = 2\pi \int_a^b f(t) \sqrt{1 + f'(t)^2} dt$$

berechnet werden kann.

- b) Sei $b \in (1, \infty)$. Setze speziell $a = 1$ und $f(t) = t^{-1}$ für $t \in [1, b]$. Bezeichne mit M_b die zugehörige Rotationsfläche und mit R_b den zugehörigen Rotationskörper, vgl. Bemerkung 3.14 b). Im Grenzfall $b \rightarrow \infty$ nennt man die so entstehende Fläche *Gabriels Horn*. Zeige

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \text{vol}(R_b) = \pi \quad \text{und} \quad \lim_{b \rightarrow \infty} \sigma(M_b) = \infty.$$

Diskutiere das folgende Paradoxon: Man kann Gabriels Horn einerseits mit einer endlichen Menge an Farbe füllen, andererseits braucht man eine unendliche Menge an Farbe um seine Oberfläche zu bedecken.

Lösungsvorschlag.

- a) Es gilt

$$\Phi'(\varphi, z) = \begin{pmatrix} -f(z) \sin(\varphi) & f'(z) \cos(\varphi) \\ f(z) \cos(\varphi) & f'(z) \sin(\varphi) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und ferner

$$|\partial_1 \Phi(\varphi, z) \times \partial_2 \Phi(\varphi, z)|_2 = \left| \begin{pmatrix} f(z) \cos(\varphi) \\ f(z) \sin(\varphi) \\ -f(z)f'(z) \end{pmatrix} \right|_2 = f(z) \sqrt{1 + f'(z)^2}.$$

Damit folgt die Behauptung aus Definition 3.27.

- b) Das Volumen von R_b berechnen wir mit dem Prinzip von Cavalieri. Für $z \in [a, b]$ gilt $R_b^z = B(0, f(z))$ und somit

$$\text{vol}(R_b) = \int_1^b \text{vol}(R_b^z) \, dz = \int_1^b \pi z^{-2} \, dz = (1 - b^{-1}) \pi \rightarrow \pi \quad \text{für } b \rightarrow \infty.$$

Mit der Formel aus Teil a) erhält man für die Oberfläche

$$\sigma_M(M_b) = 2\pi \int_1^b z^{-1} \sqrt{1 + z^{-4}} \, dz \geq 2\pi \int_1^b z^{-1} \, dz = 2\pi \log(b) \rightarrow \infty \quad \text{für } b \rightarrow \infty.$$

Das Paradoxon löst sich auf, wenn man über die Dicke der Farbschicht nachdenkt. Wenn man annimmt, dass die Dicke der Farbschicht 0 ist, dann benötigt man für die unendlich große zweidimensionale Fläche trotzdem nur Farbe, deren dreidimensionales Volumen gleich 0 ist. Wenn man jedoch annimmt, dass die Farbschicht stets eine gewisse positive Dicke hat, die nicht unterschritten werden kann, so stellt man fest, dass man die Oberfläche von Gabriels Horn nicht vollständig anmalen kann, weil die Farbe in das dünne Ende des Horns nicht mehr hineinpasst. \square