Analysis für das Lehramt

Lösungsvorschlag zum 11. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Freitag, 13. November 2026)
In der Zeitschrift *Science* erschien am 4. November 1960 der Artikel *Doomsday: Friday, 13 November, A.D. 2026*[1] von Heinz von Foerster, Patricia M. Mora und Lawrence W. Amiot. In diesem Artikel wird das Anfangswertproblem

$$N'(t) = \alpha_0 N(t)^{1+1/k}, \quad N(t_1) = N_1$$

zur Modellierung der Größe der Erdbevölkerung vorgeschlagen. Dabei ist $N(t)$ die Anzahl der Menschen zur Zeit t, die in Jahren nach Christi Geburt gemessen wird. Der Anfangswert ist $N_1 = 3,018 \cdot 10^9$ im Jahr $t_1 = 1960$. Die dimensionslosen Konstanten α_0 und k werden dadurch bestimmt, dass das obige Modell bestmöglich an die vorhandenen Daten zur Bevölkerungsentwicklung angepasst wird. Sie werden mit $\alpha_0 = 3,9661 \cdot 10^{-12}$ und $k = 0,99$ angegeben. Berechne die Blow-Up Zeit $t_0 \in (t_1, \infty)$, für die $\lim_{t\to t_0} N(t) = \infty$ gilt. Zeige, dass man die Lösung in der Form $N(t) = N_1 \left(\frac{t_0-t_1}{t_0-t}\right)^k$ für $t < t_0$ schreiben kann.

Lösungsvorschlag. Mit Trennung der Variablen berechnen wir

$$\frac{k}{\alpha_0}\left(N_1^{-1/k} - N(t)^{-1/k}\right) = \int_{N_1}^{N(t)} \frac{1}{\alpha_0} x^{-1-1/k}\,\mathrm{d}x = \int_{t_1}^{t} 1\,\mathrm{d}s = t - t_1.$$

Auflösen nach $N(t)$ liefert

$$N(t) = \frac{1}{\left(N_1^{-1/k} - \frac{\alpha_0}{k}(t-t_1)\right)^k} = \left(\frac{k}{\alpha_0}\right)^k \frac{1}{\left(\frac{k}{\alpha_0}N_1^{-1/k} + t_1 - t\right)^k} = N_1\left(\frac{t_0 - t_1}{t_0 - t}\right)^k,$$

wobei wir $t_0 = \frac{k}{\alpha_0}N_1^{-1/k} + t_1$ gesetzt und folglich $\left(\frac{k}{\alpha_0}\right)^k = N_1(t_0 - t_1)^k$ verwendet haben. Die Lösung N existiert dabei auf dem Intervall $(-\infty, t_0)$ und für $t \to t_0-$ tritt der Blow-Up $N(t) \to \infty$ auf. Setzt man den gegebenen Anfangswert und die Parameter in die Formel für die Blow-Up Zeit ein, so erhält man

$$t_0 = \frac{k}{\alpha_0}N_1^{-1/k} + t_1 = \frac{0.99}{3.9661 \cdot 10^{-12}}(3,018 \cdot 10^9)^{-1/0.99} + 1960 \approx 2026,34\ldots.$$

In Abbildung 1 ist die Lösungskurve zu diesen Parametern im Intervall $[1800, 2020]$ zu sehen. Die Punkte markieren die tatsächliche Größe der Weltbevölkerung. Man sieht, dass das Doomsday-Modell bis Anfang der 1990er Jahre eine zutreffende Prognose geliefert hat. □

[1] *Science* 04 Nov 1960: Vol. 132, Issue 3436, pp. 1291-1295, DOI: 10.1126/science.132.3436.1291

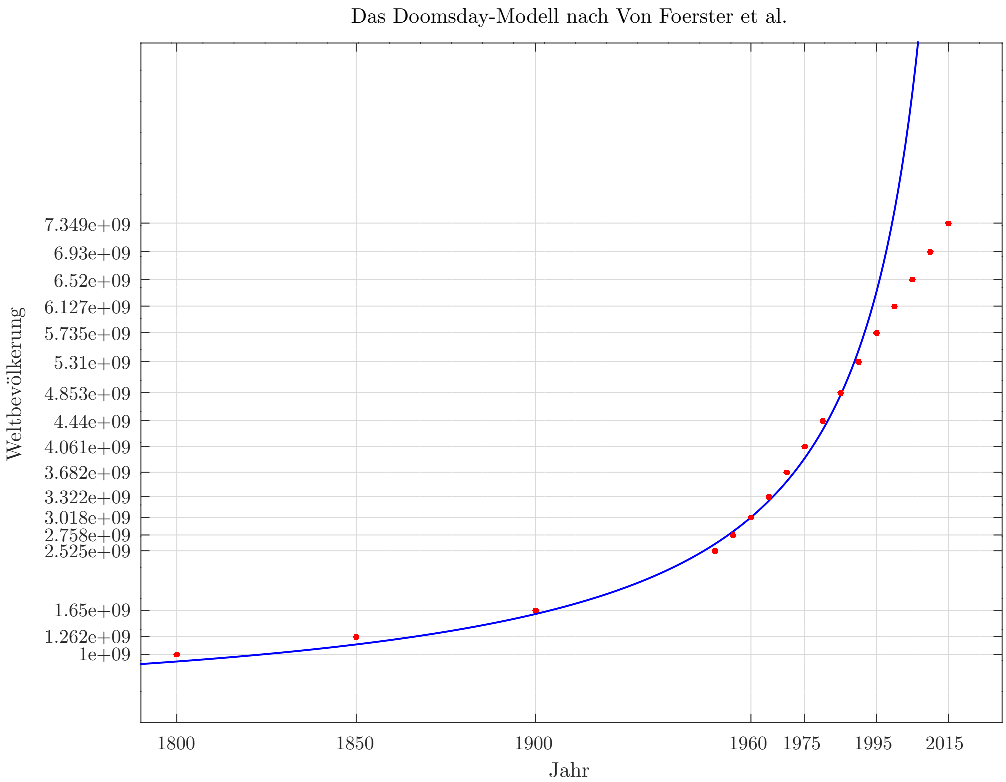

Abbildung 1: Diese Abbildung zeigt die Lösungskurve des Doomsday-Modells und einige Datenpunkte der tatsächlichen Bevölkerungsentwicklung. Die Bevölkerungsdaten sind der Tabelle `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=World_population&oldid=903049270#Past_population` entnommen.

Aufgabe 2 (Trennung der Variablen)
Sei $u_0 \in \mathbb{R}$. Löse die folgenden Anfangswertprobleme und gib jeweils das maximale Intervall an, auf dem die Lösung existiert.

a) $u'(t) = t + 1$, $u(-2) = -1$

b) $u'(t) = 5u(t)$, $u(0) = 2$

c) $u'(t) = u(t)(1 - u(t))$, $u(0) = u_0$

d) $u'(t) = -u^3(t)$, $u(0) = u_0$

e) $u'(t) = (t + \frac{2}{t})u(t)$, $u(1) = 1$

f) $u'(t) = -te^{u(t)}$, $u(0) = 1$

g) $u'(t) = \mathrm{e}^{2t}\sqrt{1 + u(t)^{-2}}$, $u(0) = 1$

Lösungsvorschlag.

a) Hier kann man direkt integrieren und erhält

$$u(t) = -1 + \int_{-2}^{t} s + 1 \,\mathrm{d}s = -1 + \frac{1}{2}t^2 + t + 2 - 2 = \frac{1}{2}t^2 + t - 1 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

b) Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet

$$u(t) = 2\mathrm{e}^{5t} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

c) Im Fall $u_0 = 0$ oder $u_0 = 1$ lautet die Lösung $u = 0$. Sie ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

Sei $u_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Wir betrachten zunächst den Fall $u_0 \in (0, 1)$. Mit Trennung der Variablen berechnen wir

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{u(t)}{1 - u(t)}\right) - \log\left(\frac{u_0}{1 - u_0}\right) &= \int_{u_0}^{u(t)} \frac{1}{x} + \frac{1}{1 - x} \,\mathrm{d}x \\ &= \int_{u_0}^{u(t)} \frac{1}{x(1 - x)} \,\mathrm{d}x \quad . \\ &= \int_0^t 1 \,\mathrm{d}s = t \end{aligned}$$

Auflösen nach t liefert

$$\frac{u(t)}{1 - u(t)} = \frac{u_0}{1 - u_0}\mathrm{e}^t$$

und ferner

$$u(t) = \frac{\mathrm{e}^t u_0}{1 - u_0 + \mathrm{e}^t u_0} = \frac{u_0}{\mathrm{e}^{-t}(1 - u_0) + u_0}.$$

Diese Lösung existiert also auf ganz $\mathbb{R}$ und wir können an der Formel direkt $\lim_{t\to\infty} u(t) = 1$ und $\lim_{t\to-\infty} u(t) = 0$ ablesen.

Als nächstes betrachten wir den Fall $u_0 > 1$. Hier muss man beim Integrieren beachten, dass in einer Umgebung von u_0 die Funktion $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ negativ ist und ihre Stammfunktion somit $x \mapsto -\log(x - 1)$ lautet. Wir erhalten dann also

$$\log\left(\frac{u(t)}{u(t) - 1}\right) - \log\left(\frac{u_0}{u_0 - 1}\right) = t.$$

Auflösen nach $u(t)$ führt dann auf die Lösungsformel

$$u(t) = \frac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t u_0 - u_0 + 1} = \frac{u_0}{u_0 + \mathrm{e}^{-t}(u_0 - 1)}.$$

Wir sehen hier, dass die Lösung auf dem Intervall $\Big(\log(1 - \frac{1}{u_0}), \infty\Big)$ existiert und $\lim_{t \to \log\left(1 - \frac{1}{u_0}\right)+} u(t) = \infty$ und $\lim_{t\to\infty} u(t) = 1$ erfüllt.

Schließlich bleibt noch der Fall $u_0 < 0$. In diesem Fall muss man beachten, dass die Stammfunktion von $x \mapsto \frac{1}{x}$ in einer Umgebung von u_0 durch $x \mapsto \log(-x)$ gegeben ist. Wir erhalten damit

$$\log\left(\frac{u(t)}{u(t) - 1}\right) - \log\left(\frac{u_0}{u_0 - 1}\right) = t.$$

Auflösen führt auf

$$u(t) = \frac{\mathrm{e}^t u_0}{\mathrm{e}^t u_0 + 1 - u_0}$$

für alle $t \in \Big(-\infty, \log(1 - \frac{1}{u_0})\Big)$. Wir sehen, dass $\lim_{t \to \log\left(1 - \frac{1}{u_0}\right)-} u(t) = -\infty$ und $\lim_{t\to-\infty} u(t) = 0$ gelten.

d) Im Fall $u_0 = 0$ lautet die Lösung $u = 0$. Sie ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

Sei $u_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Mit Trennung der Variablen berechnen wir

$$\frac{1}{2}\left(u(t)^{-2} - u_0^{-2}\right) = -\int_{u_0}^{u(t)} x^{-3}\,\mathrm{d}x = \int_0^t 1\,\mathrm{d}s = t$$

Auflösen nach $u(t)$ ergibt

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{2t + u_0^{-2}}} \quad \text{für alle } t \in \left(-\frac{1}{2u_0^2}, \infty\right).$$

e) Mit Trennung der Variablen berechnen wir

$$\log(u(t)) = \int_1^{u(t)} x^{-1}\,\mathrm{d}x = \int_1^t s + \frac{2}{s}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}t^2 + 2\log(t) - \frac{1}{2}.$$

Auflösen nach $u(t)$ liefert

$$u(t) = t^2 \mathrm{e}^{1/2(t^2-1)} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

f) Mit Trennung der Variablen berechnen wir

$$\mathrm{e}^{-u(t)} - \mathrm{e}^{-1} = -\int_1^{u(t)} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^t s\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}t^2$$

Auflösen nach $u(t)$ liefert

$$u(t) = -\log\left(\frac{1}{2}t^2 + \mathrm{e}^{-1}\right) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

g) Mit Trennung der Variablen berechnen wir

$$\sqrt{1+u(t)^2}-\sqrt{2}=\int_1^{u(t)}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x=\int_1^{u(t)}(1+x^{-2})^{-1/2}\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^t \mathrm{e}^{2s}\,\mathrm{d}s=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2t}-1)$$

Auflösen nach $u(t)$ liefert

$$u(t)=\sqrt{\frac{1}{4}\mathrm{e}^{4t}+\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{2t}+\frac{5}{4}-\sqrt{2}}\quad \text{für alle } t\in\left(\tfrac{1}{2}\log(3-2\sqrt{2}),\infty\right).$$

Das Existenzintervall der Lösung bestimmt man dabei folgendermaßen. Die Lösung existiert, solange der Term unter der Wurzel positiv ist. Mit $y=\mathrm{e}^{2t}$ muss man also die Nullstellen des quadratischen Polynoms $y^2+(4\sqrt{2}-2)y+5-4\sqrt{2}$ bestimmen. Sie lauten $-1-2\sqrt{2}$ und $3-2\sqrt{2}$. Da $y=\mathrm{e}^{2t}>0$ gilt, erhält man $t_*=\frac{1}{2}\log(3-2\sqrt{2})$. Beachte, dass $t_*<0$ gilt, da $2-2\sqrt{2}<1$ ist. Es folgt $\lim_{t\to t_*+}u(t)=0$ und $\lim_{t\to t_*+}u'(t)=\infty$. □

Aufgabe 3 (Eine Differentialungleichung)
Sei $f\in C(\mathbb{R})$. Die Funktion $\rho\in C^1([a,b],\mathbb{R})$ erfülle die strikte Differentialungleichung

$$\rho'(t)<f(\rho(t))$$

für alle $t\in(a,b]$. Sei außerdem $u\in C^1([a,b],\mathbb{R})$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$u'(t)=f(u(t)),\qquad u(a)=u_0$$

für ein $u_0>\rho(a)$. Zeige, dass $\rho(t)<u(t)$ für alle $t\in[a,b]$ gilt. Dieselbe Aussage gilt, wenn man alle Ungleichungszeichen umkehrt.
Hinweis. Versuche einen Widerspruchsbeweis: Was passiert für den kleinsten Wert von t der $\rho(t)\geq u(t)$ erfüllt?

Lösungsvorschlag. Angenommen die Behauptung, dass $\rho(t)<u(t)$ für alle $t\in[a,b]$ gelte, wäre falsch. Definiere

$$M=\{t\in[a,b]:\ \rho(t)\geq u(t)\}\,.$$

Die Menge M ist dann nicht leer und wir setzen $t_*=\inf M$. Es gibt also eine Folge $(t_n)_n$ in M die gegen t_* konvergiert und die $\rho(t_n)\geq u(t_n)$ für alle $n\in\mathbb{N}$ erfüllt. Da die Funktionen ρ und u stetig sind, folgt $\rho(t_*)\geq u(t_*)$. Außerdem gilt $\rho(t)<u(t)$ für alle $t\in[a,t_*)$ nach Definition von M, also erhalten wir sogar $\rho(t_*)=u(t_*)$. Die vorausgesetzte Differentialungleichung bzw. die Differentialgleichung besagen, dass die Ungleichung

$$\rho'(t_*)<f(\rho(t_*))=f(u(t_*))=u'(t_*)$$

gilt. Andererseits erhalten wir aus der Definition der Ableitung über den Differenzenquotient und der Wahl der Folge $(t_n)_n$, dass

$$\rho'(t)=\lim_{n\to\infty}\frac{\rho(t_n)-\rho(t_*)}{t_n-t_*}\geq\lim_{n\to\infty}\frac{u(t_n)-u(t_*)}{t_n-t_*}=u'(t_*)$$

gilt. Diese beiden Ungleichungen widersprechen sich und somit ist die Annahme falsch. □