Karlsruher Institut für Technologie

15. Juli 2019
Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Andreas Geyer-Schulz

# Analysis für das Lehramt

## Lösungsvorschlag zum 12. Übungsblatt

**Aufgabe 1 (Lineare Differentialgleichungen)**
Bestimme jeweils die Lösung des Anfangswertproblems

$$u' = Au + g, \qquad u(0) = u_0.$$

a)
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad g = 0, \qquad u_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2;\ g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}, \qquad u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

*Lösungsvorschlag.*

a) Es gilt für das charakteristische Polynom der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ 2 & -3-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda(-3-\lambda)(-1-\lambda) - 1 - 2 + 3 + \lambda - \lambda + 2(-1-\lambda) \\ &= -\lambda(3 + 4\lambda + \lambda^2) - 2\lambda - 2 = -(\lambda+1)^2(\lambda+2). \end{aligned}$$

Die Nullstellen von $p$ sind damit $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ und $\lambda_3 = -2$. Wir erhalten als Eigenräume

$$E_{-2} = \mathrm{Kern}(A - \lambda_3 I) = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

und

$$E_{-1} = \mathrm{Kern}(A - \lambda_1 I) = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right].$$

Die Dimension von $\mathrm{Kern}(A + I) = 1$ kleiner als die Vielfachheit 2 des Eigenwerts $-1$ ist, lösen wir mit dem Gaußverfahren das Gleichungssystem

$$(A + I)v = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und erhalten beispielsweise $v = (0\ 0\ 1)^\intercal$. Eine reelle Fundamentalmatrix ist damit gegeben durch

$$Y(t) = \left(\mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + t\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0 & \mathrm{e}^{-t} & t\mathrm{e}^{-t}\\ \mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-t} & t\mathrm{e}^{-t}\\ \mathrm{e}^{-2t} & 0 & \mathrm{e}^{-t}\end{pmatrix}.$$

Mit dem Gaußalgorithmus bestimmt man

$$Y(0)^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

und erhält damit für den Lösungsoperator

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{tA} = Y(t)Y(0)^{-1} &= \begin{pmatrix}0 & \mathrm{e}^{-t} & t\mathrm{e}^{-t}\\ \mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-t} & t\mathrm{e}^{-t}\\ \mathrm{e}^{-2t} & 0 & \mathrm{e}^{-t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}(1+t)\mathrm{e}^{-t} & -t\mathrm{e}^{-t} & t\mathrm{e}^{-t}\\ -\mathrm{e}^{-2t} + (1+t)\mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{-2t} - t\mathrm{e}^{-t} & t\mathrm{e}^{-t}\\ -\mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{-2t} - \mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{-t}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist damit

$$u(t) = \mathrm{e}^{tA}u_0 = \begin{pmatrix}(1+t)\mathrm{e}^{-t} & -t\mathrm{e}^{-t} & t\mathrm{e}^{-t}\\ -\mathrm{e}^{-2t} + (1+t)\mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{-2t} - t\mathrm{e}^{-t} & t\mathrm{e}^{-t}\\ -\mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{-2t} - \mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{-t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-t\mathrm{e}^{-t}\\ \mathrm{e}^{-2t} - t\mathrm{e}^{-t}\\ \mathrm{e}^{-2t} - \mathrm{e}^{-t}\end{pmatrix}.$$

b) Wir bestimmen zuerst eine reelle Fundamentalmatrix der homogenen Differentialgleichung $u' = Au$. Es gilt für das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix}1-\lambda & 2\\ 3 & -\lambda\end{pmatrix} = -(1-\lambda)\lambda - 6 = (\lambda+2)(\lambda-3).$$

Die Eigenwerte der Matrix sind damit $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 3$. Die zugehörigen Eigenräume sind

$$E_{-2} = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}\right] \quad \text{und} \quad E_3 = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right].$$

Ein reelles Fundamentalsystem ist daher gegeben durch

$$Y(t) = \left(\mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}, \mathrm{e}^{3t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{3t}\\ -3\mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{3t}\end{pmatrix}.$$

Mit

$$Y(0)^{-1} = \begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 1\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$$

erhalten wir

$$e^{tA} = Y(t)Y(0)^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2e^{-2t} & e^{3t} \\ -3e^{-2t} & e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2e^{-2t} + 3e^{3t} & -2e^{-2t} + 2e^{3t} \\ -3e^{-2t} + 3e^{3t} & 3e^{-2t} + 2e^{3t} \end{pmatrix}$$

für den Lösungsoperator der Differentialgleichung. Die Lösung des Anfangswertproblems ist nach der Variation-der-Konstanten-Formel damit gegeben durch

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{tA}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} b(s)\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2e^{-2t} + 3e^{3t} & -2e^{-2t} + 2e^{3t} \\ -3e^{-2t} + 3e^{3t} & 3e^{-2t} + 2e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\quad + \int_0^t \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2e^{-2(t-s)} + 3e^{3(t-s)} & -2e^{-2(t-s)} + 2e^{3(t-s)} \\ -3e^{-2(t-s)} + 3e^{3(t-s)} & 3e^{-2(t-s)} + 2e^{3(t-s)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ e^{-s} \end{pmatrix} \mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5e^{3t} \\ 5e^{3t} \end{pmatrix} + \int_0^t \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2e^{-2t+s} + 2e^{3t-4s} \\ 3e^{-2t+s} + 2e^{3t-4s} \end{pmatrix} \mathrm{d}s \\ &= \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\left[\begin{pmatrix} -2e^{-2t+s} - \frac{1}{2}e^{3t-4s} \\ 3e^{-2t+s} - \frac{1}{2}e^{3t-4s} \end{pmatrix}\right]_0^t \\ &= \begin{pmatrix} \frac{11}{10}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{2}{5}e^{-2t} \\ \frac{11}{10}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{3}{5}e^{-2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

**Aufgabe 2 (Die Matrixexponentialfunktion)**

a) Berechne $e^{tA}$ für

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, (iii) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, (v) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$,

(ii) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, (iv) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, (vi) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

b) Finde $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $AB \neq BA$ und $e^A e^B \neq e^{A+B}$.

c) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Es gelte $AB = BA$. Zeige durch Differentiation, dass $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

d) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gelte $e^{tA}B = Be^{tA}$. Zeige, dass $AB = BA$ gilt. *Hinweis:* Differenzieren.

e) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gelte $e^{tA}e^{tB} = e^{tB}e^{tA}$. Zeige, dass $AB = BA$ gilt.

f) *Zusatz:* Finde $A, B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mit $AB \neq BA$ und $I = e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$.

*Lösungsvorschlag.*

a) (i) Es gilt $\exp\left(t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(ii) Es gilt $\exp\left(t\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(iii) Es gilt $\exp\left(t\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{pmatrix}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(iv) Es gilt $\exp\left(t\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\mathrm{e}^t & t\mathrm{e}^t\\ 0 & \mathrm{e}^t\end{pmatrix}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(v) Es gilt $\exp\left(t\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\mathrm{e}^t & -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^t\\ 0 & \mathrm{e}^{-2t}\end{pmatrix}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(vi) Es gilt $\exp\left(t\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\cos(t) + 3\sin(t) & -2\sin(t)\\ 5\sin(t) & \cos(t) - 3\sin(t)\end{pmatrix}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

b) Setze $A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. Dann ist $A + B = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix}$. Es gilt

$$AB = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix} = BA.$$

Nach Teil a), (i), (ii) und (v) gilt

$$\mathrm{e}^A\mathrm{e}^B = \begin{pmatrix}\mathrm{e} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{-2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathrm{e} & \mathrm{e}\\ 0 & \mathrm{e}^{-2}\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}\mathrm{e} & -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2} + \frac{1}{3}\mathrm{e}\\ 0 & \mathrm{e}^{-2}\end{pmatrix} = \mathrm{e}^{A+B}.$$

c) Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{m\times m}$, $f(t) = \mathrm{e}^{t(A+B)} - \mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{tB}$. Es gilt

$$f'(t) = (A + B)\mathrm{e}^{t(A+B)} - A\mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{tB} - \mathrm{e}^{tA}B\mathrm{e}^{tB},$$

wobei wir die Ableitungsregel für die Matrixexponentialfunktion und die Produktregel verwendet haben. Aus der Voraussetzung $AB = BA$ folgt

$$\mathrm{e}^{tA}B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}A^nB = B\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}A^n = B\mathrm{e}^{tA}$$

und somit gilt $f'(t) = (A + B)f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Also ist $f$ eine Lösung der linearen Differentialgleichung $u' = (A + B)u$ mit Anfangswert $u(0) = 0$. Diese ist eindeutig bestimmt und durch $f(t) = \mathrm{e}^{t(A+B)}0 = 0$, $t \in \mathbb{R}$ gegeben. Dies impliziert die Behauptung.

d) Setze $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{m\times m}$, $f(t) = B\mathrm{e}^{tA} - \mathrm{e}^{tA}B$. Nach Voraussetzung ist $f = 0$. Es gilt also

$$0 = f'(t) = BA\mathrm{e}^{tA} - A\mathrm{e}^{tA}B$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Setzt man speziell $t = 0$, so erhält man die Behauptung.

e) Wir definieren $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{m\times m}$, $f(t) = \mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{tB} - \mathrm{e}^{tB}\mathrm{e}^{tA}$. Nach Voraussetzung ist $f = 0$. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt also

$$0 = f'(t) = A\mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{tB} + \mathrm{e}^{tA}B\mathrm{e}^{tB} - B\mathrm{e}^{tB}\mathrm{e}^{tA} - \mathrm{e}^{tB}A\mathrm{e}^{tA}$$

und

$$\begin{aligned}0 = f''(t) = A^2 \mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{tB} &+ A\mathrm{e}^{tA}B\mathrm{e}^{tB} + A\mathrm{e}^{tA}B\mathrm{e}^{tB} + \mathrm{e}^{tA}B^2\mathrm{e}^{tB} \\ &- B^2\mathrm{e}^{tB}\mathrm{e}^{tA} - B\mathrm{e}^{tB}A\mathrm{e}^{tA} - B\mathrm{e}^{tB}A\mathrm{e}^{tA} - \mathrm{e}^{tB}A^2\mathrm{e}^{tA}\end{aligned}$$

Setzt man $t = 0$ so erhält man $0 = 2AB - 2AB$, wie behauptet.

f) Setze $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\pi\mathrm{i} \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2\pi\mathrm{i} \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4\pi^2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 2\pi\mathrm{i} \\ 0 & -4\pi^2 \end{pmatrix} = BA$$

und $\mathrm{e}^A = I$, $\mathrm{e}^B = I$ sowie $\mathrm{e}^{A+B} = I$. Die Berechnung von $\mathrm{e}^{tB}$ kann man recht schnell erledigen. Da $B$ zwei verschiedene Eigenwerte hat, ist $B$ diagonalisierbar und somit gibt es $S \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $S^{-1}BS = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\pi\mathrm{i} \end{pmatrix}$. Es folgt

$$\mathrm{e}^{tB} = S^{-1} \exp\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\pi\mathrm{i} \end{pmatrix}\right) S = S^{-1}S = I.$$

Die Berechnung von $\mathrm{e}^{A+B}$ ist analog. $\square$