Karlsruher Institut für Technologie

22. Juli 2019
Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Andreas Geyer-Schulz

Analysis für das Lehramt

Lösungsvorschlag zum 13. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Umgekehrt ist es schwieriger!)
Gegeben ist

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{2t} & 2e^{-t} - 2e^{2t} & 0 \\ e^{2t} - e^{-t} & 2e^{2t} - e^{-t} & 0 \\ te^{2t} + 2e^{2t} - 2e^{-t} & 2te^{2t} + 2e^{2t} - 2e^{-t} & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

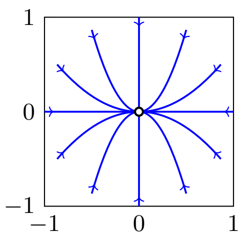
Wie lautet A? *Hinweis:* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{tA} = Ae^{tA}$.

Lösungsvorschlag. Es gilt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{tA} = Ae^{tA}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Setzt man speziell $t = 0$, so erhält man $A = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{tA}\right]_{t=0}$. Mit dieser Formel erhält man

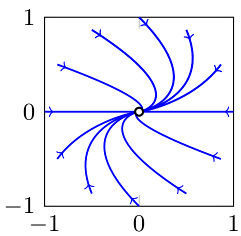
$$A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 2 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Bemerkung. Diese Methode eignet sich auch für eine Plausibilitätsprüfung des Ergebnisses bei der Berechnung von e^{tA}. Die Berechnung der Ableitung bei 0 alleine reicht aber nicht aus, um die Rechnung zweifelsfrei zu bestätigen. Es ist nämlich nicht klar, ob die gefundene Formel auch das Exponentialgesetz $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$ für alle $t, s \in \mathbb{R}$ erfüllt.

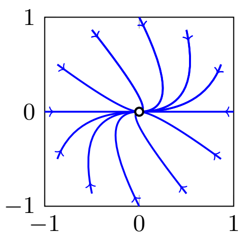
Aufgabe 2 (Wie sehen die Lösungen einer linearen Differentialgleichung aus?)
Die Abbildungen zeigen Lösungen der Differentialgleichung $u'(t) = Au(t)$ für $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.



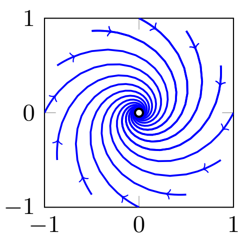
(1)



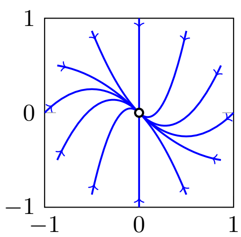
(3)



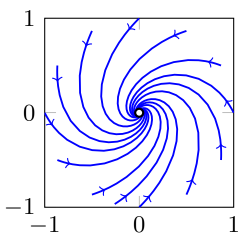
(5)



(2)



(4)



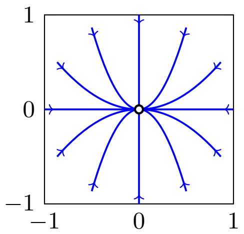
(6)

Ordne den Bildern die folgenden Matrizen zu:

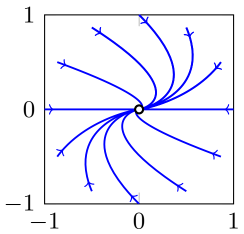
a) $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ e) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ d) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ f) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

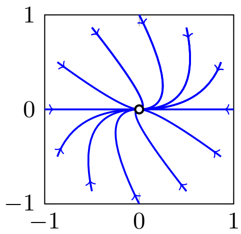
Lösungsvorschlag.



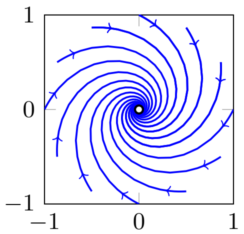
(1) e) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$



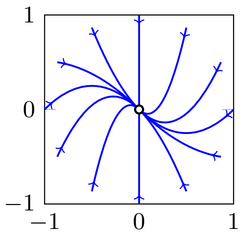
(3) b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$



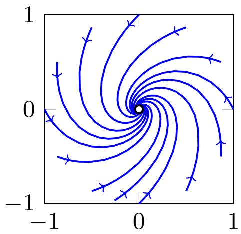
(5) f) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$



(2) d) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$



(4) c) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$



(6) a) $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

□

Aufgabe 3 (Zur Übung)
Berechne e^{tA} für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösungsvorschlag. Wir bestimmen zunächst die Eigenwerte von A. Aus

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ -1 & \lambda - 2 & 0 \\ -2 & -3 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda(\lambda - 2) + 1) = (\lambda - 1)^3$$

folgt, dass $\lambda_1 = 1$ ein dreifacher Eigenwert von A ist. Wir untersuchen die Eigenwertgleichung $(\lambda I - A)v = 0$, d.h.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und erhalten $x + y = 0$, $2x + 3y = 0$, also wird der eindimensionale Eigenraum durch $v_1 = e_1 = (0, 0, 1)^\intercal$ aufgespannt. Aus dem Gleichungssystem $(A - I)w = v_1$, d.h.,

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und erhalten $x + y = 0$, $2x + 3y = 1$, also $x = -1$, $y = 1$. Damit ergibt sich der Hauptvektor erster Stufe $w = (-1, 1, 0)^\intercal$. Wir untersuchen nun ferner $(A - I)w_2 = w_1$, d.h.

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten das Gleichungssystem $x + y = 2$ und $2x + 3y = 0$, also ist $w_2 = (3, -2, 0)^\intercal$ ein Hauptvektor zweiter Stufe. Aus der Formel in der Vorlesung ergibt sich somit das Fundamentalsystem

$$\begin{aligned} Y(t) &= \left(\mathrm{e}^t v_1, \mathrm{e}^t w_1 + t\mathrm{e}^t v_1, \mathrm{e}^t w_2 + t\mathrm{e}^t w_1 + \frac{1}{2}t^2 v_1 \right) \\ &= \left(\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3-t \\ 0 & 1 & -2+t \\ 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mit

$$Y(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Y(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

folgt schließlich

$$\mathrm{e}^{tA} = Y(t)Y(0)^{-1} = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3-t \\ 0 & 1 & -2+t \\ 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1-t & -t & 0 \\ t & 1+t & 0 \\ 2t + \frac{1}{2}t^2 & 3t + \frac{1}{2}t^2 & 1 \end{pmatrix}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. □

Aufgabe 4 (Räuber-Beute-Modell)

Eine Verallgemeinerung des Räuber-Beute-Modells aus Beispiel 4.1 lautet

$$\begin{aligned} u'(t) &= au(t) - bu(t)^2 - ru(t)v(t), \quad t \geq 0, \\ v'(t) &= cv(t) - dv(t)^2 + su(t)v(t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Dabei sind Konstanten $a, b, c, d, r, s \geq 0$ und Anfangswerte $u(0) = u_0 \geq 0$ und $v(0) = v_0 \geq 0$ gegeben. Wir wollen das Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - bx^2 - rxy \\ cy - dy^2 + sxy \end{pmatrix}$$

genauer untersuchen.

a) Beschreibt u die Räuber- oder die Beutepopulation? Warum?

b) Welches Modell wird im Fall $r = s = 0$ beschrieben?

c) Wir nehmen $a, b, c, d, r, s > 0$ und $cr < ad$ an. Bestimme die Lösungsmenge N_1 der Gleichung $f_1(x, y) = 0$ und die Lösungsmenge N_2 von $f_2(x, y) = 0$. Skizziere diese Mengen. Deute durch Pfeile den Verlauf von f auf diesen Mengen an. In jedem Punkt von N_1 verläuft f zum Beispiel parallel zur y-Achse, da die x-Komponente von f in diesem Punkt verschwindet. Bestimme, ob f in so einem Punkt nach unten oder nach oben zeigt. Die Skizze soll dann ähnlich wie im Beispiel in der Übung zum logistischen Wachstum aussehen.

d) Markiere die Menge $N_1 \cap N_2$. In diesen Punkten verschwindet f. Wählt man so einen Punkt als Anfangswert, so erhält man eine konstante Lösung.

e) Zeige mit dem Positivitätskriterium aus Satz 4.16, dass für jede Lösung $u(t) \geq 0$ und $v(t) \geq 0$ auf dem maximalen Existenzintervall gilt.

f) Zeige ebenfalls mit Satz 4.16: Wenn $u_0 = 0$ und $v_0 > 0$, dann erfüllt die Lösung $u(t) = 0$ für alle $t \in [0, \infty)$. Welche Gleichung erfüllt v und wie lautet $\lim_{t\to\infty} v(t)$?

Lösungsvorschlag.

a) Da $r, s \geq 0$ sind, beschreibt u die Beute- und v die Räuberpopulation. Der Term $u(t)v(t)$ modelliert das Aufeinandertreffen von Räubern und Beutetieren. Schreibt man die erste Differentialgleichung in der Form

$$u'(t) = (a - bu(t) - rv(t))u(t),$$

so erkennt man, dass die Wachstumsrate $(a - bu(t) - rv(t)$ der Beutepopulation umso niedriger ist, je mehr Raubtiere $v(t)$ vorhanden sind. Umgekehrt sind man in der zweiten Gleichung, dass die Raubtiere durch ein hohes Nahrungsangebot in Form von Beutetieren profitieren.

b) Falls $r = s = 0$ gilt, so sind die beiden Differentialgleichungen für u und v nicht miteinander gekoppelt. Sofern $a, b, c, d > 0$ gelten, liegt hier in beiden Fällen ein logistisches Wachstum vor. Man beachte, dass hier die Raubtierpopulation offenbar noch eine andere Nahrungsquelle haben muss, da sie nicht ausstirbt. Dies steht im Gegensatz zu Beispiel 4.23 in der Vorlesung.

c) Aus $f_1(x, y) = (a - bx - ry)x$ folgt

$$f_1(x, y) = 0 \iff x = 0 \quad \text{oder} \quad y = \frac{a}{r} - \frac{b}{r}x.$$

Aus $f_2(x, y) = (c - dy + sx)y$ folgt

$$f_2(x, y) = 0 \iff y = 0 \quad \text{oder} \quad y = \frac{c}{d} + \frac{s}{d}x.$$

Die Menge N_1 und N_2 bestehen also jeweils aus zwei Geraden. Die Pfeilrichtung auf N_1 und N_2 wird nun jeweils durch das Vorzeichen von f_2 bzw. f_1 bestimmt. In Abbildung 1 ist das Vektorfeld f durch graue Pfeile angedeutet, in blau sind einige Lösungskurven eingezeichnet.

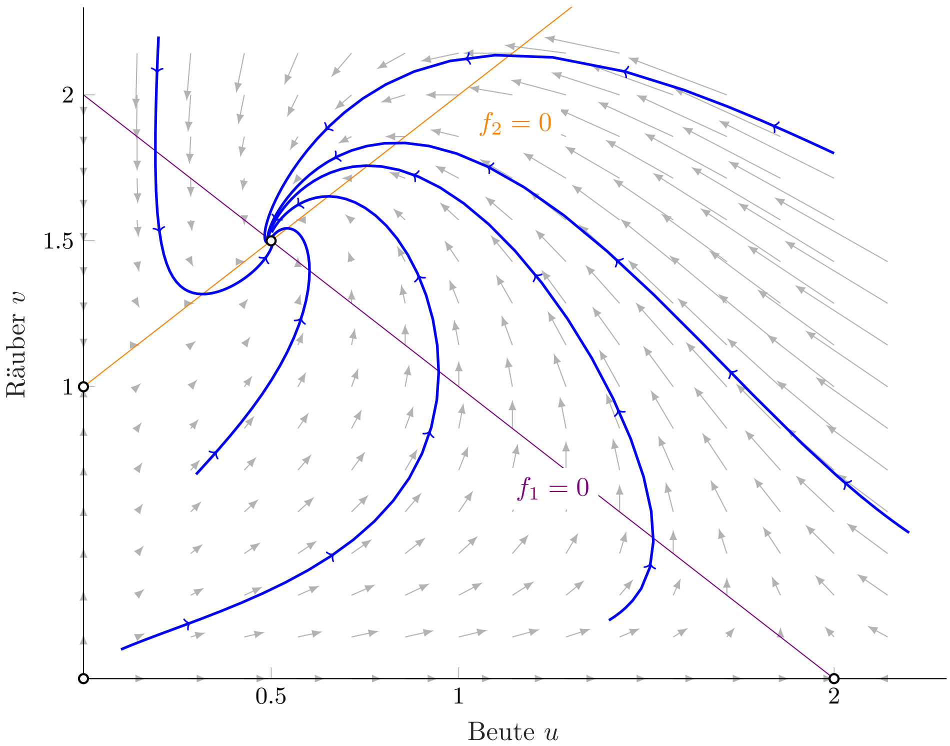


Abbildung 1: Das Räuber-Beute Modell mit Parametern $a = 2$ und $b = c = d = r = s = 1$. Die Equilibria lauten in diesem Fall $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 1)$ und $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. Man sieht, dass die Lösungen mit Anfangswerten $u_0 > 0$ und $v_0 > 0$ anscheinend gegen das Koexistenzequilibrium $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ konvergieren.

d) Die vier Schnittpunkte der in Teil c) bestimmten geraden lauten

$$N_1 \cap N_2 = \left\{ (0,0), \left(\tfrac{a}{b}, 0\right), \left(0, \tfrac{c}{d}\right), \left(\tfrac{ad-cr}{bd+rs}, \tfrac{as+bc}{bd+sr}\right) \right\}.$$

Man nennt $\left(\frac{ad-cr}{bd+rs}, \frac{as+bc}{bd+sr}\right)$ das *Koexistenzequilibrium.* Wegen der Voraussetzung $cr < ad$ an die Parameter liegt es stets in $(0,\infty)^2$. Es gilt

$$\frac{a}{b} > \frac{ad-cr}{bd+rs} \quad \text{und} \quad \frac{c}{d} < \frac{as+bc}{bd+rs}.$$

Die Räuber profitieren also von der Verfügbarkeit der Beute, umgekehrt verringert sich die Beutepopulation in Anwesenheit der Räuber.

e) Es gilt $f_1(0,y) = 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$ und $f_2(x,0) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also erfüllt f das Positivitätskriterium und Satz 4.16 liefert die Behauptung.

f) Aus Teil e) wissen wir, dass $u \geq 0$ auf dem maximalen Existenzintervall J gilt. Um mit dem Positivitätskriterium auf $u = 0$ zu schließen, wollen wir $-u \geq 0$ zeigen. Wir müssen dazu überlegen, welches Differentialgleichungssystem von den Funktionen $(-u, v)$ erfüllt wird. Einsetzen in das Ausgangssystem liefert

$$\begin{aligned} (-u)'(t) &= a\big(-u(t)\big) + b\big(-u(t)\big)^2 - r\big(-u(t)\big)v(t), \quad t \geq 0, \\ v'(t) &= cv(t) - dv(t)^2 - s\big(-u(t)\big)v(t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Definiert man also

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + bx^2 - rxy \\ cy - dy^2 - sxy \end{pmatrix},$$

so erhält man, dass $(-u, v)$ das System $(u,v)' = \tilde{f}(u,v)$ erfüllen. Da $\tilde{f}_1(0,y) = 0$ und $\tilde{f}_2(x,0) = 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gelten, erfüllt auch $\tilde{f}$ das Positivitätskriterium. Satz 4.16 liefert also $-u \geq 0$ auf dem maximalen Existenzintervall $\tilde{J}$. Wir wissen noch nicht, ob $J = \tilde{J} = [0,\infty)$ gilt. Es folgt aber zumindest $u = 0$ auf $J \cap \tilde{J}$. Damit erfüllt v die Differentialgleichung $v' = cv - dv^2$ auf $J \cap \tilde{J}$. Dies ist das logistische Wachstum und wir wissen, dass v auf $J \cap \tilde{J}$ beschränkt ist. Da auch u auf $J \cap \tilde{J}$ beschränkt ist (u ist ja sogar 0), ist Blow-Up ausgeschlossen. Es folgt $J = \tilde{J} = [0,\infty)$ und aus der Diskussion des logistischen Wachstums $\lim_{t\to\infty} v(t) = \frac{c}{d}$, siehe Beispiel 4.20 in der Vorlesung bzw. Blatt 11, Aufgabe 2 c) in der Übung. $\square$