KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Prof.Dr. Lutz Weis
Christoph Kriegler

SS 2010
16.4.2010

1. Übungsblatt

Stochatische Differentialgleichungen

Aufgabe 1

Monotonie-Prinzip:

Es sei Ω eine Grundmenge und $\mathcal{M}$ ein schnittstabiles Mengensystem. Wir wiederholen, dass $\sigma(\mathcal{M})$ die kleinste σ-Algebra ist, die $\mathcal{M}$ umfasst. Ein Dynkinsystem ist eine Teilmenge δ der Potenzmenge von Ω mit

a) $\Omega \in \delta$

b) $D, E \in \delta\, D \subset E \Longrightarrow E \backslash D \in \delta.$

c) Sind $D_n \in \delta (n \in \mathbb{N})$ paarweise disjunkt, dann ist auch $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \in \delta$.

Wir definieren
$$\delta(\mathcal{M}) = \bigcap_{\delta \supset \mathcal{M},\, \delta \text{ Dynkinsystem}} \delta.$$

Zeigen Sie, dass gilt:
$$\delta(\mathcal{M}) = \sigma(\mathcal{M}).$$

Aufgabe 2

(Ω, Σ, μ) sei ein Wahrscheinlichkeitsraum. Es seien $A_n \in \Sigma$ Ereignisse und

$$B = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \text{ liegt in unendlich vielen } A_n\}.$$

Zeigen Sie:

a) Falls $\sum_n P(A_n) < \infty$, dann folgt $P(B) = 0$.

b) Sind die Ereignisse A_n stochastisch unabhängig, dann gilt umgekehrt:
Ist $P(B) = 0$, dann folgt $\sum_n P(A_n) < \infty$.

Aufgabe 3

Es sei $X = (X_1, \dots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine Zufallsvariable und $Q = [q_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine positiv definite Matrix, sowie $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{R}^n$.
X heißt $\mathcal{N}(m, Q)$-normalverteilt, falls die zugehörige Verteilungsfunktion gegeben ist durch

$$P_{m,Q}(B) = \frac{1}{\sqrt{\det Q}\sqrt{2\pi}^n} \int_B \exp[-\frac{1}{2}(x-m)^t Q^{-1}(x-m)]dx \quad (B \subset \mathbb{R}^n \text{ meßbar}).$$

Zeigen Sie:

a) Es ist $P_{m,Q}(B) = P_{\mathrm{Id}}(A^{-1}(B-m))$, wobei A so gewählt ist, dass $Q = A^t A$ gilt.

b) Es gilt

$$\frac{1}{\sqrt{\det Q}\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp[-\frac{1}{2}(x-m)^t Q^{-1}(x-m)]dx = 1,$$

d.h. $P_{m,Q}$ ist wirklich eine Verteilungsfunktion.

c) Es gilt $E(X_i) = m_i$ und $q_{ij} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j) := E[(X_i - m_i)(X_j - m_j)]$. Daher wird Q auch als die Kovarianzmatrix bezeichnet.

Aufgabe 4

Es sei X eine $\mathcal{N}(m, Q)$-normalverteilte Zufallsvariable. Weiter sei $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine surjektive lineare Abbildung und $X_1, \dots, X_n$ zentrierte normalverteilte Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P), sodass $Y = (X_1, \dots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine normalverteilte Zufallsvariable ist.

a) Zeigen Sie, dass $\Phi(X)$ wieder eine normalverteilte Zufallsvariable ist.

b) Zeigen Sie, dass $X_1, \dots, X_n$ unabhängig sind genau dann wenn sie orthogonal in $L^2(\Omega, P)$ sind.

c) Zeigen Sie, dass $X_1 + \dots + X_n$ wieder normalverteilt ist.

Aufgabe 5

Es seien X_1, X_2 stochastisch unabhängige reelle Zufallsvariablen, die die Dichten f_1 und f_2 besitzen. (d.h. es existiert eine Funktion $f_i : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, sodass $P(X_i \in A) = \int_A f_i(x)dx$ für alle messbaren A).
Zeigen Sie, dass $X_1 + X_2$ die Dichte

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} f_1(y) f_2(x-y) dy$$

besitzt.