KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Prof.Dr. Lutz Weis
Christoph Kriegler

SS 2010
30.4.2010

2. Übungsblatt

Stochastische Differentialgleichungen

Aufgabe 6

Es sei $\{X_t : 0 \leqslant t < \infty\}$ ein Gaußscher Prozess. Es gelte $E(X_t) = 0$ für alle $0 \leqslant t < T$. Zeigen Sie: Gilt $\mathrm{Cov}(X_s, X_t) = \min(s,t)$ für alle $0 \leqslant s, t < T$, dann hat X_t unabhängige Zuwächse $X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \ldots$, $0 \leqslant t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < T$.
Ist zusätzlich $X_0 = 0$ und hat der Prozess stetige Pfade, und gilt $X_0 = 0$, so ist X_t also eine Brownsche Bewegung auf $[0, T)$.

Aufgabe 7

Es sei B_t eine Brownsche Bewegung für $t \geqslant 0$.

a) Es sei $X_t = \frac{1}{\sqrt{a}} B_{at}$.

b) Es sei $Y_0 = 0$ und $Y_t = t B_{1/t}$ für $t > 0$.

Zeigen Sie, dass X_t (Zeitdilation) und Y_t (Zeitinversion) wieder Brownsche Bewegungen sind.

Aufgabe 8

Es sei $g_n(t) = \int_0^t H_n(\tau) d\tau$ wobei H_n die aus der Vorlesung bekannte Haarbasis von $C[0,1]$ ist. Ferner sei $(X_n)_n$ eien Folge unabhängiger Gaußscher Zufallsvariablen. Die Brownsche Brücke ist definiert durch

$$U_t = \sum_{n=1}^{\infty} X_n H_n(t).$$

Ferner sei die Brownsche Bewegung (vgl. Vorlesung!)

$$B_t = \sum_{n=0}^{\infty} X_n g_n(t)$$

vorgegeben.

a) Zeigen Sie:

$$U_t = B_t - t B_1, \quad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

b) Zeigen Sie:

$$\mathrm{Cov}(U_s, U_t) = s(1-t), \quad (0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1).$$

c) Zeigen Sie, dass $Y_t = (1+t) U_{t/(1+t)}$ eine Brownsche Bewegung ist.