Aufgabe 12 Für $x \in \ell^1$ definieren wir

$$\|x\| := \sup_{n\in\mathbb{N}}\Big|\sum_{j=1}^{n} x_j\Big|.$$

Zeigen Sie:

a) $(\ell^1, \|\cdot\|)$ ist ein normierter Vektorraum.

b) $(\ell^1, \|\cdot\|)$ ist nicht vollständig.

Wie sieht die Vervollständigung $(\ell^1, \|\cdot\|)\widetilde{\ }$ aus?

Lösungsvorschlag: a) Da wir bereits wissen, dass ℓ^1 ein Vektorraum ist, genügt es die Norm-Eigenschaften nachzuweisen.

(i) Für $x \in \ell^1$ gilt $\|x\| \geq 0$ und $\|x\| \leq \|x\|_{\ell^1} < \infty$, d.h. $\|\cdot\|\colon \ell^1 \to [0,\infty)$ ist wohldefiniert. Ist $\|x\| = 0$, so folgt

$$|x_1| \leq \|x\| = 0, \quad |x_1 + x_2| \leq \|x\| = 0, \quad \ldots \quad \Big|\sum_{j=1}^{n} x_j\Big| \leq \|x\| = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Aus der ersten Ungleichung folgt $x_1 = 0$, und aus der zweiten $x_1 + x_2 = x_2 = 0$. Induktiv erhalten wir so $x_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Für $x \in \ell^1$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ folgt

$$\|\alpha x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}}\Big|\sum_{j=1}^{n} \alpha x_j\Big| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha|\Big|\sum_{j=1}^{n} x_j\Big| = |\alpha|\|x\|.$$

(iii) Für $x, y \in \ell^1$ erhalten wir schließlich noch

$$\|x+y\| = \sup_{n\in\mathbb{N}}\Big|\sum_{j=1}^{n} x_j + y_j\Big| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}}\Big(\Big|\sum_{j=1}^{n} x_j\Big| + \Big|\sum_{j=1}^{n} y_j\Big|\Big) \leq \|x\| + \|y\|.$$

b) Wir konstruieren zunächst eine Cauchyfolge in $(\ell^1, \|\cdot\|)$ und zeigen anschließend, dass diese nicht in $(\ell^1, \|\cdot\|)$ konvergieren kann. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$x^{(n)} := \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^j}{j} e_j \in \ell^1,$$

wobei e_j der j-te Einheitsvektor in ℓ^1 ist. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da nach Analysis 1 die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j}$ konvergiert, existiert ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$\Big|\sum_{j=m+1}^{n} \frac{(-1)^j}{j}\Big| < \varepsilon \quad \text{für } n \geq m \geq n_\varepsilon.$$

Für $n \geq m \geq n_\varepsilon$ gilt dann aber

$$\|x^{(n)} - x^{(m)}\| = \Big\|\sum_{j=m+1}^{n} \frac{(-1)^j}{j} e_j\Big\| = \sup_{k\in\{m+1,\ldots,n\}}\Big|\sum_{j=m+1}^{k} \frac{(-1)^j}{j}\Big| < \varepsilon,$$

also ist $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge.

Ähnlich zu a) (i) kann man nun zeigen, dass die Konvergenz bezüglich $\|\cdot\|$ die punktweise Konvergenz impliziert. In unserem Fall konvergiert die Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise zu $(\frac{(-1)^j}{j}))_{j\in\mathbb{N}} \notin \ell^1$. Also kann $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ in $(\ell^1, \|\cdot\|)$ nicht konvergieren.

Wie sieht die Vervollständigung aus? Wir definieren die Menge

$$D := \{(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \colon \sum_{j=1}^{\infty} x_j \text{ konvergiert}\}$$

und $\|x\|_D := \|x\|$ für $x \in D$. Völlig analog zu a) zeigt man nun, dass $(D, \|\cdot\|_D)$ ein normierter Vektorraum ist mit $\ell^1 \subseteq D$.

Wir zeigen nun: $(D, \|\cdot\|_D)$ ist vollständig mit $\overline{\ell^1}^{\|\cdot\|_D} = D$. Dann ist $(\ell^1, \|\cdot\|)^{\sim} = (D, \|\cdot\|_D)$.

(i) Für die Dichtheit wählen wir für $x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in D$ einfach die Folge $x^{(k)} := \sum_{j=1}^{k} x_j e_j \in \ell^1$, $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\|x - x^{(k)}\|_D = \sup_{n\geq k+1} \left| \sum_{j=k+1}^{n} x_j \right| \to 0 \quad \text{für } k \to \infty,$$

da $x \in D$.

(ii) Sei $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in D. Dann ist per Definition der Norm in D die Folge

$$\left[\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right]_{k\in\mathbb{N}}$$

eine Cauchyfolge in $(c, \|\cdot\|_\infty)$. Das heißt, es existiert ein $y \in c$ mit

$$\left\| \left(y_n - \sum_{j=1}^{n} x_j^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \right\|_\infty \to 0 \quad \text{für } k \to \infty.$$

Damit gilt insbesondere $y_n = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{n} x_j^{(k)}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Genauer bedeutet dies

$$y_1 = \lim_{k\to\infty} x_1^{(k)} =: x_1$$
$$y_2 = \lim_{k\to\infty} x_1^{(k)} + x_2^{(k)} = x_1 + \lim_{k\to\infty} x_2^{(k)} \iff \lim_{k\to\infty} x_2^{(k)} = y_2 - x_1 =: x_2.$$

Induktiv erhalten wir so eine Folge $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit $y_n = \sum_{j=1}^{n} x_j$. Da $y \in c$, konvergiert auch die Reihe $(\sum_{j=1}^{n} x_j)_{n\in\mathbb{N}}$. Dies heißt aber gerade, dass $x := (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in D$. Außerdem gilt

$$\|x - x^{(k)}\|_D = \left\| \left(y_n - \sum_{j=1}^{n} x_j^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \right\|_\infty \to 0 \quad \text{für } k \to \infty.$$

Also ist $(D, \|\cdot\|_D)$ vollständig.