Aufgabe 17 Seien $a, b, y_0 \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $I := [a, b]$. Sei $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt und stetig. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Für jedes $\alpha > 0$ existiert genau eine Funktion $y_\alpha : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ mit

$$y_\alpha(t) = \begin{cases} y_0, & \text{falls } t \leq a, \\ y_0 + \int_a^t f(s, y_\alpha(s-\alpha))\,\mathrm{d}s, & \text{falls } a < t \leq b, \end{cases}$$

für alle $t \in (-\infty, b]$.

b) Die Menge $H := \{y_\alpha|_I : \alpha > 0\}$ ist relativ kompakt in $C(I)$.

c) Das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & \text{für } t \in I, \\ y(a) = y_0, \end{cases}$$

besitzt eine Lösung.

Lösungsvorschlag: a) Sei $\alpha > 0$ fixiert. Da $b - a > 0$ existiert ein eindeutiges $N \in \mathbb{N}$ mit $N\alpha \leq b - a < (N+1)\alpha$. Definiere nun $a_k := a + \alpha k$ für $k \in \{0, \dots, N+1\}$. Dann gilt gerade $a_N \leq b < a_{N+1}$. Induktiv definieren wir nun

$$y_0(t) := y_0 \quad \text{für } t \in (-\infty, a],$$

und für $k \in \{1, \dots, N+1\}$

$$y_k(t) = \begin{cases} y_0, & \text{falls } t \leq a, \\ y_0 + \int_a^t f(s, y_{k-1}(s-\alpha))\,\mathrm{d}s, & \text{falls } a < t \leq b \wedge a_k, \end{cases}$$

Dann ist y_k wohldefiniert (beachte, dass $s - \alpha \leq t - \alpha \leq b \wedge a_k - \alpha \leq b \wedge a_{k-1}$) und stetig. Außerdem gilt

$$y_k|_{(-\infty, b \wedge a_{k-1}]} = y_{k-1} \quad \text{für alle } k \in \{1, \dots, N+1\},$$

denn: Für $k = 1$ gilt $b \wedge a_{k-1} = b \wedge a_0 = a$, d.h. für $t \in (-\infty, b \wedge a_{k-1}]$ gilt $y_1(t) = y_0 = y_0(t)$. Nehmen wir nun an, dass die Aussage für ein $k \in \{1, \dots, N\}$ gilt, so folgt für $t \in (a, b \wedge a_k]$ wegen $t - \alpha \leq b \wedge a_{k-1}$

$$y_{k+1}(t) = y_0 + \int_a^t f(s, \underbrace{y_k(s-\alpha)}_{=y_{k-1}(s-\alpha)})\,\mathrm{d}s = y_k(t).$$

Definiere nun $y_\alpha := y_{N+1}$. Dann gilt nach obiger Eigenschaft

$$y_\alpha(t) = \begin{cases} y_0, & \text{falls } t \leq a, \\ y_0 + \int_a^t f(s, y_\alpha(s-\alpha))\,\mathrm{d}s, & \text{falls } a < t \leq b, \end{cases}$$

Ist nun $\widetilde{y}_\alpha$ eine weitere Funktion mit dieser Identität, so folgt induktiv wie oben $\widetilde{y}_\alpha|_{(-\infty, b \wedge a_k]} = y_k$. Also insbesondere $\widetilde{y}_\alpha = y_{N+1} = y_\alpha$.

b) Nach dem Theorem von Arzela-Ascoli genügt es die Beschränktheit und gleichgradige Stetigkeit von H zu zeigen. Sei $M := \sup_{(t,x) \in I \times \mathbb{R}} |f(t, x)| < \infty$. Dann gilt für alle $\alpha > 0$ und $s, t \in I$ mit $s \leq t$

$$|y_\alpha(t)| \leq |y_0| + \int_0^t |f(r, y_\alpha(r))|\,\mathrm{d}r \leq |y_0| + M(b-a),$$

$$|y_\alpha(t) - y_\alpha(s)| \leq \int_s^t |f(r, y_\alpha(r)|\,\mathrm{d}r \leq M|t-s|.$$

Aus der ersten Ungleichung folgt direkt die Beschränktheit und aus der zweiten die gleichgradige Stetigkeit.

c) Betrachte die Folge $(y_{1/n})_{n\in\mathbb{N}}$. Da H relativ kompakt ist, existiert ein $y \in C(I)$ und eine Teilfolge, sodass $(y_{1/n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen y konvergiert. Sei nun $s \in I$ mit $s > a$. Dann existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $s - \frac{1}{n_k} > a$ für $k \geq k_0$. Für diese $k \geq k_0$ folgt hieraus

$$\begin{aligned}\left|y_{1/n_k}(s - \tfrac{1}{n_k}) - y(s)\right| &\leq \left|y_{1/n_k}(s - \tfrac{1}{n_k}) - y(s - \tfrac{1}{n_k})\right| + \left|y(s - \tfrac{1}{n_k}) - y(s)\right| \\ &\leq \|y_{1/n_k} - y\|_\infty + \left|y(s - \tfrac{1}{n_k}) - y(s)\right| \to 0\end{aligned}$$

für $k \to \infty$. Insbesondere gilt dann wegen der Stetigkeit von f für jedes $s \in [a, t]$

$$\lim_{k\to\infty} f(s, y_{1/n_k}(s - \tfrac{1}{n_k})) = f(s, y(s)).$$

Da $|f(s, y_{1/n_k}(s - \frac{1}{n_k}))| \leq M$, folgt aus dem Satz von Lebesgue

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^t f(s, y_{1/n_k}(s - \tfrac{1}{n_k}))\, \mathrm{d}s = \int_a^t f(s, y(s))\, \mathrm{d}s.$$

Mit Teilaufgabe a) folgt schließlich

$$y(t) = \lim_{k\to\infty} y_{1/n_k}(t) = y_0 + \lim_{k\to\infty} \int_a^t f(s, y_{1/n_k}(s - \tfrac{1}{n_k}))\, \mathrm{d}s = y_0 + \int_a^t f(s, y(s))\, \mathrm{d}s.$$

D.h. $y \in C^1(I)$ mit $y(a) = y_0$ und $y'(t) = f(t, y(t))$.

Aufgabe 18 Sei $d \in \mathbb{N}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt.

a) Sei $\alpha \in (0, 1)$. Zeigen Sie, dass die Einbettung $C^\alpha(\Omega) \hookrightarrow C(\Omega)$ kompakt ist.

b) Sei Ω konvex mit $\mathring{\Omega} \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass die Einbettung $C^1(\Omega) \hookrightarrow C(\Omega)$ kompakt ist.

Lösungsvorschlag: a) Es genügt zu zeigen, dass die abgeschlossene Einheitskugel von $C^\alpha(\Omega)$ in $C(\Omega)$ relativ kompakt ist. Nach dem Satz von Arzela-Ascoli müssen wir also die Beschränktheit und gleichgradige Stetigkeit der Menge $A := \{f \in C^\alpha(\Omega) \colon \|f\|_{C^\alpha} \leq 1\}$ zeigen. Sei $\|\cdot\|_\alpha$ definiert durch

$$\|f\|_\alpha := |f(x_0)| + [f]_\alpha, \quad \text{wobei } [f]_\alpha := \sup_{x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

für $f \in C^\alpha(\Omega)$ und ein fest gewähltes $x_0 \in \Omega$. Da Ω kompakt ist, existiert ein $R > 1$ mit $\Omega \subseteq K(x_0, R)$. Damit erhalten wir dann

$$|f(x)| \leq |f(x_0)| + |f(x) - f(x_0)| \leq |f(x_0)| + [f]_\alpha |x - x_0|^\alpha \leq R^\alpha \|f\|_\alpha \leq R^\alpha$$

für alle $f \in A$ und alle $x \in \Omega$. D.h. $\sup_{f\in A} \|f\|_\infty \leq R^\alpha$, also ist A beschränkt.

Sei nun $\varepsilon > 0$ und $\delta_\varepsilon = \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}$. Dann gilt für $f \in A$ und $x, y \in \Omega$ mit $|x - y| < \delta_\varepsilon$

$$|f(x) - f(y)| \leq [f]_\alpha |x - y|^\alpha \leq |x - y|^\alpha < \delta_\varepsilon^\alpha = \varepsilon,$$

d.h. A ist gleichgradig stetig.

b) Es genügt wieder zu zeigen, dass $A := \{f \in C^1(\Omega) \colon \|f\|_{C^1} \leq 1\}$ gleichgradig stetig und beschränkt in $C(\Omega)$ ist. Die Beschränktheit folgt aus $\|f\|_\infty \leq \|f\|_{C^1} \leq 1$ für alle $f \in A$. Die gleichgradige Stetigkeit folgt mit dem Mittelwertsatz aus

$$|f(x) - f(y)| \leq \|f'\|_\infty |x - y| \leq |x - y| \qquad \text{für alle } f \in A \text{ und alle } x, y \in \Omega.$$

Also ist A relativ kompakt.