Behauptung: Seien X, Y, Z Banachräume und $B : X \times Y \to Z$ eine bilineare Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

a) B ist stetig;

b) Für alle $x \in X$ und $y \in Y$ sind $B(x, \cdot)$ und $B(\cdot, y)$ stetig;

c) B ist stetig in $(0,0)$;

d) B ist beschränkt, das heißt es gibt $M > 0$ mit

$$\|B(x,y)\|_Z \leq M\|x\|_X\|y\|_Y$$

für alle $x \in X$ und $y \in Y$.

Beweis. *a)* $\Rightarrow$ *b)* : klar.
b) $\Rightarrow$ *c)* : Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ Folgen mit $x_n \to 0$ und $y_n \to 0$ für $n \to \infty$. Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$ den Operator $T_n : Y \to Z$ durch $T_n y := B(x_n, y)$ für $y \in Y$. Nach Voraussetzung gilt einerseits $T_n \in B(Y, Z)$ und andererseits

$$T_n y = B(x_n, y) \to B(0, y) = 0$$

für $n \to \infty$ und $y \in Y$. Aus Aufgabe 19 a) folgt

$$B(x_n, y_n) = T_n y_n \to 0 = B(0,0)$$

für $n \to \infty$ und damit die Stetigkeit von B in $(0,0)$.
c) $\Rightarrow$ *d)* : Wir nehmen an, B sei nicht beschränkt. Dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein Paar $(x_n, y_n) \in X \times Y$ mit

$$\|B(x_n, y_n)\|_Z > n\|x_n\|_X\|y_n\|_Y.$$

Insbesondere haben wir $x_n \neq 0$ und $y_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, denn sonst wäre $0 = \|B(x_n, y_n)\|_Z > n\|x_n\|_X\|y_n\|_Y = 0$ erfüllt. Wir setzen

$$\tilde{x}_n := \frac{x_n}{\sqrt{n}\|x_n\|_X}, \qquad \tilde{y}_n := \frac{y_n}{\sqrt{n}\|y_n\|_Y}$$

und erhalten $\|\tilde{x}_n\|_X \to 0$, $\|\tilde{y}_n\|_Y \to 0$, aber

$$\|B(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)\|_Z = \frac{1}{n\|x_n\|_X\|y_n\|_Y}\|B(x_n, y_n)\|_Z > 1$$

für $n \in \mathbb{N}$ im Widerspruch zur Stetigkeit von B in 0.
d) $\Rightarrow$ *a)* : Seien $x, x_n \in X$ und $y, y_n \in Y$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n \to x$ und $y_n \to y$

für $n \to \infty$. Dann gibt es ein $C > 0$ mit $\|y_n\|_Y \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und wir erhalten unter Verwendung der Voraussetzung d)

$$\begin{aligned}\|B(x,y) - B(x_n,y_n)\|_Z &\leq \|B(x,y-y_n)\|_Z + \|B(x-x_n,y_n)\|_Z \\ &\leq M\|x\|_X\|y-y_n\|_Y + M\|x-x_n\|_X\|y_n\|_Y \to 0\end{aligned}$$

für $n \to \infty$. $\square$