Aufgabe 30

a) Seien $(G, \langle\cdot,\cdot\rangle_G)$ und $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ Hilberträume über $\mathbb{K}$, $G, H \neq \{0\}$ und $p \in [1,\infty]$. Dann definieren wir $X := G \times H$ und für $x = (g,h) \in X$ die Normen

$$\|x\|_p := \left(\|g\|_G^p + \|h\|_H^p\right)^{1/p}, \quad \text{für } p \in [1,\infty) \text{ und}$$
$$\|x\|_\infty := \max\{\|g\|_G, \|h\|_H\}.$$

(i) Zeigen Sie, dass $(X, \|\cdot\|_p)$ ein Hilbertraum ist genau dann, wenn $p = 2$.

(ii) Zeigen Sie, dass $(X, \|\cdot\|_p)$ für jedes $p \in [1,\infty]$ isomorph zu einem Hilbertraum ist.

b) Sei $p \in [1,\infty] \setminus \{2\}$ und $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, in dem zwei disjunkte Mengen $A, B \in \mathcal{A}$ existieren mit $\mu(A), \mu(B) \in (0,\infty)$. Zeigen Sie, dass in $L^p(\Omega,\mu)$ kein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ existiert mit $\|f\|_{L^p} = \sqrt{\langle f, f\rangle}$ für alle $f \in L^p(\Omega,\mu)$.

Lösungsvorschlag: a) (i) Sei zunächst $p = 2$. Dann ist $(X, \|\cdot\|_2)$ nach Aufgabe 2 ein normierter Vektorraum. Man rechnet nun leicht nach, dass durch

$$\langle x, y\rangle_X := \langle g_1, g_2\rangle_G + \langle h_1, h_2\rangle_H, \quad x = (g_1,h_1), y = (g_2,h_2) \in X,$$

ein Skalarprodukt auf X definiert wird mit

$$\langle x, x\rangle_X = \langle g, g\rangle_G + \langle h, h\rangle_H = \|g\|_G^2 + \|h\|_H^2 = \|x\|_2^2, \quad x = (g,h) \in X.$$

Also wird $\|\cdot\|_2$ durch ein Skalarprodukt induziert. Der Nachweis der Vollständigkeit von $(X, \|\cdot\|_2)$ verläuft völlig analog zu $(\mathbb{R}^2, |\cdot|)$.

Sei nun $p \neq 2$. Wir wählen ein $g \in G$ und $h \in H$ mit $\|g\|_G = 1$ und $\|h\|_H = 1$ und setzen $x := (g,0), y := (0,h) \in X$. Dann gilt:

$$\|x+y\|_\infty^2 + \|x-y\|_\infty^2 = 1 + 1 \neq 2 + 2 = 2\|x\|_\infty^2 + 2\|y\|_\infty^2,$$

sowie

$$\|x+y\|_p^2 + \|x-y\|_p^2 = 2 \cdot 2^{2/p} \overset{!}{=} 2 \cdot 2 = 2\|x\|_p^2 + 2\|y\|_p^2 \iff p = 2.$$

Also ist für $p \neq 2$ die Parallelogrammidentität nicht erfüllt und nach Vorlesung somit $(X, \|\cdot\|_p)$ kein Hilbertraum.

a)(ii) Wir definieren die Abbildung

$$\Phi\colon (X, \|\cdot\|_p) \to (X, \|\cdot\|_2), \quad \Phi(x) = x.$$

Nach Aufgabe 2 sind $\|\cdot\|_p$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalent. Also ist Φ wohldefiniert, linear, bijektiv und stetig mit stetiger Inversen. D.h. jedes $(X, \|\cdot\|_p)$ ist isomorph zu dem Hilbertraum $(X, \|\cdot\|_2)$.

b) Wir wählen zwei disjunkte Mengen A, B mit $\mu(A), \mu(B) \in (0,\infty)$.

1. Fall: $p = \infty$. Für $f := \mathbb{1}_A$ und $g := \mathbb{1}_B$ erhalten wir wegen der Disjunktheit von A und B

$$\|f+g\|_{L^\infty}^2 + \|f-g\|_{L^\infty}^2 = 2 \neq 4 = 2\|f\|_{L^\infty}^2 + 2\|g\|_{L^\infty}^2.$$

2. Fall: $p \in [1,\infty) \setminus \{2\}$. Für $f := \frac{1}{\mu(A)^{1/p}}\mathbb{1}_A$ und $g := \frac{1}{\mu(B)^{1/p}}\mathbb{1}_B$ gilt

$$\|f+g\|_{L^p}^2 + \|f-g\|_{L^p}^2 = 2^{2/p} + 2^{2/p} = 2 \cdot 2^{2/p} \overset{!}{=} 4 = 2\|f\|_{L^p}^2 + 2\|g\|_{L^p}^2 \iff p = 2.$$

Also ist in jedem Fall die Parallelogrammidentität nicht erfüllt. D.h. $\|\cdot\|_{L^p}$ wird für $p \neq 2$ nicht von einem Skalarprodukt induziert.