KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Lutz Weis
Markus Antoni

WS 2015/2016
23. Oktober 2015

Funktionalanalysis

1. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 30. Oktober 2015, 13:30 Uhr

Aufgabe 1 - K (L^p-Räume)

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und seien $p, q, r, p_1, \ldots, p_N \in [1, \infty]$ und $f, g, h_1, \ldots, h_N \colon X \to \mathbb{K}$ messbar für ein $N \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

a) Ist $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, $f \in L^p(X, \mu)$ und $g \in L^q(X, \mu)$, so ist $f \cdot g \in L^r(X, \mu)$ mit
$$\|f \cdot g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

b) Gilt $\frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_N}$ und $h_n \in L^{p_n}(X, \mu)$ für $n = 1, \ldots, N$, so ist $h_1 \cdot \ldots \cdot h_N \in L^r(X, \mu)$ mit
$$\|h_1 \cdot \ldots \cdot h_N\|_{L^r} \leq \|h_1\|_{L^{p_1}} \cdot \ldots \cdot \|h_N\|_{L^{p_N}}.$$

c) Seien $p < r < q$ und $f \in L^p(X, \mu) \cap L^q(X, \mu)$. Dann ist auch $f \in L^r(X, \mu)$ mit
$$\|f\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}^{\theta} \|f\|_{L^q}^{1-\theta},$$
wobei $\theta \in (0, 1)$ durch $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$ gegeben ist.

Sei nun $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \sum_{n \geq 1} \delta_{\{n\}})$, d.h. $L^p(X, \mu) = \ell^p$. Zeigen Sie:

d) Für $x = (x_n)_{n=1}^N \in \mathbb{K}^N$ und $p \leq q$ gilt
$$\|x\|_{\ell^p} \leq N^{1/p - 1/q} \|x\|_{\ell^q}.$$

e) Für $x = (x_n)_{n \geq 1} \in \ell^q$ und $p \geq q$ gilt
$$\|x\|_{\ell^p} \leq \|x\|_{\ell^q}.$$

Aufgabe 2 (Produkt-Räume)

Seien $(X_1, \|\cdot\|_{X_1}), \ldots, (X_N, \|\cdot\|_{X_N})$ normierte Vektorräume über $\mathbb{K}$. Dann definieren wir $X := X_1 \times \ldots \times X_N$ und für $x = (x_n)_{n=1}^N \in X$
$$|||x|||_p := \left(\sum_{n=1}^N \|x_n\|_{X_n}^p \right)^{1/p} \quad \text{für } p \in [1, \infty) \text{ und}$$
$$|||x|||_\infty := \max_{n=1,\ldots,N} \|x_n\|_{X_n}.$$

Zeigen Sie:

a) $(X, |||\cdot|||_p)$ ist ein normierter Vektorraum für $p \in [1, \infty]$.

b) Für $p, q \in [1, \infty]$ sind die Normen $|||\cdot|||_p$ und $|||\cdot|||_q$ auf X äquivalent.

Aufgabe 3 - K **(Beschränkte p-Variation)**

Seien $a < b$ reelle Zahlen. Eine endliche Menge $P = \{a = t_0 < \ldots < t_N = b\} \subseteq [a,b]$, $N \in \mathbb{N}$, heißt *Partition* von $[a,b]$. Sei $\mathcal{P}[a,b]$ die Menge aller Partitionen von [a,b]. Dann definieren wir für eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{K}^d$ und $p \in [1,\infty)$

$$[f]_{p-var} := \Big(\sup_{P \in \mathcal{P}[a,b]} \sum_{n=1}^{N} |f(t_n) - f(t_{n-1})|^p \Big)^{1/p}.$$

Ist $[f]_{p-var} < \infty$, so sagen wir f sei von *beschränkter p-Variation*. Wir definieren nun $BV_p[a,b] := \{f\colon [a,b] \to \mathbb{K}^d \colon [f]_{p-var} < \infty\}$ sowie

$$\|f\|_{p-var} := |f(a)| + [f]_{p-var}, \qquad f \in BV_p[a,b].$$

Zeigen Sie:

a) $\big(BV_p[a,b], \|\cdot\|_{p-var}\big)$ ist ein normierter Vektorraum.

b) Für $p \leq q$ gilt $BV_p[a,b] \subseteq BV_q[a,b]$.

c) Für $\alpha \in (0,1)$ ist $C^\alpha[a,b] \subseteq BV_{1/\alpha}[a,b]$ mit

$$\|f\|_{1/\alpha-var} \leq (1 \vee (b-a)^\alpha)\|f\|_\alpha,$$

wobei $\|f\|_\alpha := |f(a)| + \sup_{s,t\in[a,b]} \frac{|f(t)-f(s)|}{|t-s|^\alpha}$ für $f \in C^\alpha[a,b]$.

Allgemeine Informationen

- **Klausur**

  Die schriftliche Modulprüfung zur Vorlesung findet statt am

  Montag, dem 04.04.2016, von 11:00 bis 13:00 Uhr im Hörsaal Neue Chemie.

- **Übungsblätter**

  – Die Übungsblätter erscheinen immer freitags und werden in der Übung ausgegeben. Sie können außerdem auf der Vorlesungshomepage

  www.math.kit.edu/iana3/lehre/funkana2015w/

  gefunden und heruntergeladen werden.

  – Aufgaben, die mit einem **K** gekennzeichnet sind, können zur Korrektur abgegeben werden. Werfen Sie in diesem Fall die Bearbeitungen in den Abgabekasten *Funktionalanalysis WS 15/16* im Erdgeschoss des Kollegiengebäudes Mathematik (20.30) vor Raum 0.001. Bitte tackern Sie die bearbeiteten Blätter und versehen Sie sie mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

  – Die korrigierten Übungsblätter werden in der Übung zurückgegeben und können anschließend im Raum 2.069 gefunden werden.

- **Übungsschein**

  – Für jede **K**-Aufgabe können Sie 5 Punkte erhalten. Zum Erhalt eines Scheines ist es ausreichend jeweils 35 Punkte auf den Übungsblättern 1-7 und 8-14 zu erzielen.

  – Besitzer eines Übungsscheines erhalten Bonuspunkte für die Klausur. Genaue Details hierzu werden noch bekannt gegeben.