KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Lutz Weis
Markus Antoni

WS 2015/2016
13. November 2015

Funktionalanalysis
4. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 20. November 2015, 13:30 Uhr

Aufgabe 10 - K (Räume beschränkter Funktionen)

Sei (M, d) ein metrischer Raum und A eine nichtleere Menge. Dann definieren wir

$$B(A, M) := \{f\colon A \to M : \exists x \in M \text{ mit } \sup_{a \in A} d(f(a), x) < \infty\},$$

sowie die Abbildung

$$d_\infty\colon B(A, M) \times B(A, M) \to \mathbb{R}, \quad (f, g) \mapsto \sup_{a \in A} d(f(a), g(a)).$$

Zeigen Sie:

a) $(B(A, M), d_\infty)$ ist ein metrischer Raum.

b) $(B(A, M), d_\infty)$ ist vollständig genau dann, wenn (M, d) vollständig ist.

Aufgabe 11 - K (Räume von Maßen)

Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Dann nennen wir eine Abbildung $\mu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) ein *signiertes* bzw. *komplexes Maß*, falls für jede Folge $(A_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{A}$ von disjunkten Mengen

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

gilt. Beachte, dass μ nur endliche Werte annimmt und daher $\mu(\varnothing) = 0$ ist. Die Menge der signierten bzw. komplexen Maße bezeichnen wir mit $M(\Omega, \mathcal{A})$. Außerdem definieren wir

$$\mathbb{P} := \Big\{\mathbb{A} := \{A_1, \ldots, A_N\} : A_1, \ldots, A_N \in \mathcal{A} \text{ sind disjunkt und } \Omega = A_1 \cup \ldots \cup A_N, N \in \mathbb{N}\Big\},$$

sowie die *Variationsnorm* von $\mu \in M(\Omega, \mathcal{A})$ durch

$$\|\mu\| := \sup_{\mathbb{A} \in \mathbb{P}} \sum_{A \in \mathbb{A}} |\mu(A)|.$$

Zeigen Sie, dass $(M(\Omega, \mathcal{A}), \|\cdot\|)$ ein Banachraum ist.

Hinweis: Sie können ohne Beweis voraussetzen, dass $\|\mu\| < \infty$ für jedes $\mu \in M(\Omega, \mathcal{A})$. Für einen Beweis dieser Aussage siehe z.B. Rudin, Real and Complex Analysis, Theorem 6.4.

— bitte wenden —

Aufgabe 12 (Vervollständigung)

Für $x \in \ell^1$ definieren wir

$$\|x\| := \sup_{n \in \mathbb{N}} \Big| \sum_{j=1}^{n} x_j \Big|.$$

Zeigen Sie:

a) $(\ell^1, \|\cdot\|)$ ist ein normierter Vektorraum.

b) $(\ell^1, \|\cdot\|)$ ist nicht vollständig.

Wie sieht die Vervollständigung $(\ell^1, \|\cdot\|)^{\sim}$ aus?