KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) WS 2015/2016
Institut für Analysis 20. November 2015
Prof. Dr. Lutz Weis
Markus Antoni

Funktionalanalysis
5. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 27. November 2015, 13:30 Uhr

Aufgabe 13 - K (Homöomorphismen)

Seien (M, d_M) und (N, d_N) metrische Räume. Eine Abbildung $f\colon M \to N$ heißt *Homöomorphismus*, falls f bijektiv und stetig ist mit stetiger Umkehrabbildung. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Ist $f\colon M \to N$ ein Homöomorphismus, so gilt:

   (i) $\overline{f(A)} = f(\overline{A})$ und $f(A)^{\circ} = f(\mathring{A})$ für $A \subseteq M$.

   (ii) (M, d_M) ist genau dann separabel/kompakt, wenn dies auf (N, d_N) zutrifft.

   (iii) Sind f und f^{-1} zusätzlich gleichmäßig stetig, so gilt: (M, d_M) ist genau dann vollständig/total beschränkt, wenn dies auf (N, d_N) zutrifft.

b) Ist $f\colon M \to N$ stetig und bijektiv, so gilt:

$$f \text{ ist homöomorph } \iff f \text{ bildet offene Mengen auf offene Mengen ab.}$$

Aufgabe 14 (Kompaktheit)

a) Sei X ein unendlich dimensionaler Banachraum. Bestimmen Sie alle beschränkten, offenen Mengen $\varnothing \neq U \subseteq X$ mit kompaktem Rand.

b) Sei X ein normierter Vektorraum. Zeigen Sie, dass X genau dann separabel ist, wenn eine kompakte Menge $K \subseteq X$ existiert mit $\overline{\operatorname{lin} K} = E$.

Aufgabe 15 - K (Kompakte Mengen in Folgenräumen)

a) Sei $p \in [1, \infty)$. Zeigen Sie, dass eine Menge $K \subseteq \ell^p$ kompakt ist, falls sie abgeschlossen und beschränkt ist und falls

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{(x_n)\in K} \sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n|^p = 0.$$

b) Zeigen Sie, dass eine Menge $K \subseteq c_0$ kompakt ist, falls sie abgeschlossen und beschränkt ist und falls

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{(x_n)\in K} \sup_{n\geq N+1} |x_n| = 0.$$