KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Lutz Weis
Markus Antoni

WS 2015/2016
11. Dezember 2015

Funktionalanalysis
8. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 18. Dezember 2015, 13:30 Uhr

Aufgabe 22 - K (Abgeschlossene Operatoren)

Sei X ein Banachraum, $A\colon D(A) \subseteq X \to X$ ein abgeschlossener und $B\colon D(B) \subseteq X \to X$ ein linearer Operator auf X. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) Der Kern von A ist abgeschlossen in X.

b) Ist $B\colon D(B) \to X$ bijektiv und B^{-1} stetig, so ist der Operator $C = BA$ mit $D(C) = \{x \in D(A)\colon Ax \in D(B)\}$ abgeschlossen.

c) Sei $D(A) = D(B)$ und $\|Bx\| \leq a\|Ax\| + b\|x\|$ für Konstanten $a \in [0,1)$, $b \geq 0$ und alle $x \in D(A)$. Dann ist der Operator $C = A + B$ mit $D(C) = D(A)$ abgeschlossen.

Aufgabe 23 - K (Differentialoperator zweiter Ordnung)

Wir betrachten den Banachraum $X = C_b(\mathbb{R})$ versehen mit der Supremumsnorm sowie

$$C_b^2(\mathbb{R}) := \{f \in C^2(\mathbb{R})\colon f, f', f'' \in X\}.$$

Zeigen Sie:

a) Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $C_\varepsilon > 0$ mit

$$\|f'\|_\infty \leq \varepsilon\|f''\|_\infty + C_\varepsilon\|f\|_\infty \qquad \text{für alle } f \in C_b^2(\mathbb{R}).$$

b) Der Operator $Af = f''$ mit $D(A) = C_b^2(\mathbb{R})$ ist abgeschlossen.

Aufgabe 24 (Vollständigkeit im Satz vom abgeschlossenen Graphen)

Der Satz vom abgeschlossenen Graphen besagt, dass ein linearer und abgeschlossener Operator $T\colon X \to Y$ bereits stetig ist, falls X und Y Banachräume sind.

a) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass der Satz vom abgeschlossenen Graphen im Allgemeinen nicht mehr gilt, wenn nur Y als vollständig angenommen wird.

b) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass der Satz vom abgeschlossenen Graphen im Allgemeinen nicht mehr gilt, wenn nur X als vollständig angenommen wird.

   Anleitung: Wählen Sie in $X = \ell^2$ eine algebraische Basis $B := (b_i)_{i\in I}$ mit $\|b_i\|_{\ell^2} = 1$ für alle $i \in I$. Jedes $x \in X$ hat also eine eindeutige Darstellung als *endliche* Summe $x = \sum_i \alpha_i b_i$ für passende $(\alpha_i)_i \subseteq \mathbb{K}$. Definiere dann $\|x\|_B := \sum_i |\alpha_i|$ für $x = \sum_i \alpha_i b_i$. Sei Y der mit der $\|\cdot\|_B$-Norm versehene Vektorraum ℓ^2. Betrachen Sie nun den identischen Operator $\mathrm{Id}\colon X \to Y$.