KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) WS 2015/2016
Institut für Analysis 8. Januar 2016
Prof. Dr. Lutz Weis
Markus Antoni

Funktionalanalysis
10. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 15. Januar 2016, 13:30 Uhr

Aufgabe 28 - K (Spektrum von Projektionen)

Sei X ein Banachraum, $T \in B(X)$ und p ein Polynom mit $p(T) = 0$. Zeigen Sie, dass

$$\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{K} \colon p(\lambda) = 0\},$$

und folgern Sie, dass $\sigma(P) = \{0, 1\}$ für jede nichttriviale Projektion $P \in B(X) \setminus \{0, I\}$.

Aufgabe 29 (Wenn $D(A) \hookrightarrow X$ kompakt ist ...)

Sei X ein Banachraum und $A \colon D(A) \subseteq X \to X$ linear und abgeschlossen mit $\rho(A) \neq \emptyset$. Außerdem sei die Einbettung

$$j \colon (D(A), \|\cdot\|_A) \hookrightarrow (X, \|\cdot\|)$$

kompakt. Zeigen Sie, dass dann $\sigma(A)$ aus einer Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Eigenwerten von A mit endlich dimensionalen Eigenräumen besteht. Zeigen Sie außerdem, dass $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entweder endlich ist oder $\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty$ gilt.

Aufgabe 30 - K (Hilberträume)

a) Seien $(G, \langle\cdot,\cdot\rangle_G)$ und $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ Hilberträume über $\mathbb{K}$, $G, H \neq \{0\}$ und $p \in [1, \infty]$. Dann definieren wir $X := G \times H$ und für $x = (g, h) \in X$ die Normen

$$\|x\|_p := \left(\|g\|_G^p + \|h\|_H^p\right)^{1/p}, \quad \text{für } p \in [1, \infty) \text{ und}$$
$$\|x\|_\infty := \max\{\|g\|_G, \|h\|_H\}.$$

(i) Zeigen Sie, dass $(X, \|\cdot\|_p)$ ein Hilbertraum ist genau dann, wenn $p = 2$.

(ii) Zeigen Sie, dass $(X, \|\cdot\|_p)$ für jedes $p \in [1, \infty]$ isomorph zu einem Hilbertraum ist.

b) Sei $p \in [1, \infty] \setminus \{2\}$ und $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, in dem zwei disjunkte Mengen $A, B \in \mathcal{A}$ existieren mit $\mu(A), \mu(B) \in (0, \infty)$. Zeigen Sie, dass in $L^p(\Omega, \mu)$ kein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ existiert mit $\|f\|_{L^p} = \sqrt{\langle f, f\rangle}$ für alle $f \in L^p(\Omega, \mu)$.