KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) WS 2015/2016
Institut für Analysis 15. Januar 2016
Prof. Dr. Lutz Weis
Markus Antoni

Funktionalanalysis
11. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 22. Januar 2016, 13:30 Uhr

Aufgabe 31 - K (Orthogonales Komplement)

Sei H ein Hilbertraum, $A \subseteq H$ und U, V abgeschlossene Unterräume von H. Zeigen Sie:

a) $(A^\perp)^\perp = \overline{\operatorname{lin} A}$.

b) $U \cap V = (U^\perp + V^\perp)^\perp$.

c) $U + V$ ist abgeschlossen in H genau dann, wenn $U + V = (U^\perp \cap V^\perp)^\perp$.

Aufgabe 32 - K (Haar-Basis)

Sei $X = L^2[0,1]$ und $J_{k,j} := [(j-1)2^{-k}, j2^{-k})$ für $k \in \mathbb{N}$ und $j \in \{1, \dots, 2^k\}$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ definieren wir dann die Funktion $r_k \colon [0,1] \to \{1, -1\}$ durch

$$r_k(t) = \begin{cases} 1, & \text{falls } t \in J_{k,j} \text{ und } j \text{ ist ungerade,} \\ -1, & \text{falls } t \in J_{k,j} \text{ und } j \text{ ist gerade.} \end{cases}$$

Sei $\psi = r_1$. Für $n = 2^m + \ell \in \mathbb{N}$ ($m \in \mathbb{N}_0$ und $\ell \in \{0, \dots, 2^m - 1\}$) definieren wir die Haar-Funktionen

$$h_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad h_n(t) = \begin{cases} 2^{m/2}\psi(2^m t - \ell), & \text{falls } t \in [\frac{\ell}{2^m}, \frac{\ell+1}{2^m}], \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

sowie $h_0 := 1$. Zeigen Sie:

a) $R = \{r_k \colon k \in \mathbb{N}\}$ und $H = \{h_n \colon n \in \mathbb{N}_0\}$ sind Orthonormalsysteme in X.

b) H ist eine Orthonormalbasis in X.

Aufgabe 33 (Beispiel eines nicht separablen Hilbertraums)

Für $\lambda \in \mathbb{R}$ definieren wir die Funktion $f_\lambda \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f_\lambda(t) = e^{i\lambda t}$ und $X = \operatorname{lin}\{f_\lambda \colon \lambda \in \mathbb{R}\}$. Zeigen Sie:

a) Für $f, g \in X$ existiert der Grenzwert $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$.

b) Die Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \colon X \times X \to \mathbb{K}, \quad \langle f, g \rangle := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$$

definiert ein Skalarprodukt auf X.

c) Die Vervollständigung $AP_2(\mathbb{R})$ von X bezüglich der Norm $\|\cdot\| := \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ ist nicht separabel.