KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Lutz Weis
Markus Antoni

WS 2015/2016
22. Januar 2016

Funktionalanalysis
12. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 29. Januar 2016, 13:30 Uhr

Aufgabe 34 (Kompaktheit in Hilberträumen)

Sei H ein Hilbertraum mit Orthonormalbasis $\{h_n : n \in \mathbb{N}\}$ und P_n die Orthogonalprojektion auf $\operatorname{lin}\{h_1, \dots, h_n\}$. Zeigen Sie, dass eine beschränkte Teilmenge $U \subseteq H$ genau dann relativ kompakt ist, wenn

$$\sup_{x \in U} \|x - P_n x\| \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Aufgabe 35 - K (Orthogonalprojektionen)

Sei H ein Hilbertraum und $P \in B(H) \setminus \{0\}$ eine Projektion. Zeigen Sie, dass dann die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) P ist eine Orthogonalprojektion;

b) $\|P\| = 1$;

c) P ist selbstadjungiert;

d) P ist normal;

e) P ist positiv, d.h. $\langle Px, x \rangle \geq 0$ für alle $x \in H$.

Aufgabe 36 - K (Adjungierte Operatoren)

a) Seien $H = L^2(\mathbb{R})$ und $w \in L^\infty(\mathbb{R})$. Wir betrachten die Abbildung

$$T : H \to H, \quad (Tf)(t) = w(t) f(t-1).$$

Zeigen Sie, dass T wohldefiniert, linear und stetig ist und bestimmen Sie $\|T\|$ und T^*.

b) Sei H ein unendlichdimensionaler Hilbertraum mit Orthonormalbasis $\{v_n : n \in \mathbb{N}\}$. Für $a \in \ell^\infty$ betrachen wir die Abbildung

$$T : H \to H, \quad Tx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle x, v_n \rangle v_n.$$

(i) Zeigen Sie, dass T ein wohldefinierter, linear, stetiger und normaler Operator ist und bestimmen Sie $\|T\|$ und T^*.

(ii) Zeigen Sie, dass $B(H)$ nicht separabel ist.