KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) WS 2015/2016
Institut für Analysis 29. Januar 2016
Prof. Dr. Lutz Weis
Markus Antoni

Funktionalanalysis
13. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 5. Februar 2016, 13:30 Uhr

Aufgabe 37 - K (Fredholm-Alternative)

a) Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $k \in L^2(\Omega \times \Omega)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $g \in L^2(\Omega)$. Dann betrachten wir die Gleichung

$$\lambda f(x) - \int_\Omega k(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y = g(x), \quad x \in \Omega. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass dann eine der folgenden beiden Alternativen gilt:

A) Die Gleichung $\int_\Omega k(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y = \lambda f(x)$, $x \in \Omega$, hat nur die triviale Lösung. Dann hat (1) für jedes $g \in L^2(\Omega)$ genau eine Lösung $f \in L^2(\Omega)$.

B) Die Gleichung $\int_\Omega k(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y = \lambda f(x)$, $x \in \Omega$, hat einen n-dimensionalen Lösungsraum für ein $n \in \mathbb{N}$. In diesem Fall existieren $h_1, \ldots, h_n \in L^2(\Omega)$, sodass (1) genau dann eine Lösung besitzt, falls $\langle g, h_k \rangle_{L^2} = 0$ für $k = 1, \ldots, n$.

b) Für $f \in L^2(0,\infty)$ definieren wir den Operator

$$Tf(x) := \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Zeigen Sie, dass $T\colon L^2(0,\infty) \to L^2(0,\infty)$ stetig, aber nicht kompakt ist.

Aufgabe 38 - K (Faltungsoperator)

Sei $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch und $h|_{[0,2\pi]} \in L^2[0,2\pi]$. Dann betrachen wir den Faltungsoperator

$$T\colon L^2[0,2\pi] \to L^2[0,2\pi], \quad Tf(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(t-s) f(s)\,\mathrm{d}s.$$

a) Zeigen Sie, dass T wohldefiniert, normal und kompakt ist.

b) Benutzen Sie die Fourierreihe von h, um die Eigenwerte und Eigenvektoren von T zu bestimmen.

c) Bestimmen Sie die Spektralzerlegung von T.

Aufgabe 39 (Dualität in L^p-Räumen)

Seien $p \in [1,\infty)$, $q \in (1,\infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum. In diesem Fall betrachten wir die Abbildung

$$\Phi\colon L^q(\Omega) \to (L^p(\Omega))', \quad \Phi(g)(f) := \int_\Omega fg\,\mathrm{d}\mu.$$

Zeigen Sie, dass Φ einen wohldefinierten isometrischen Isomorphismus definiert.