

HÖHERE MATHEMATIK FÜR DIE FACHRICHTUNG PHYSIK

8. ÜBUNGSBLATT

AUFGABE 43 (ÜBUNG)

- a) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass Urbilder von abgeschlossener Mengen unter f wieder abgeschlossene Mengen sind.
- b) Zeigen Sie, dass die Vereinigung endlich vieler bzw. der Schnitt abzählbar vieler abgeschlossener Mengen in \mathbb{R} abgeschlossen ist.

AUFGABE 44 (TUTORIUM)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$ für $a > 0$, b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(x)}{x-1}$, c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+1}$,
- d) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \arcsin(x))^{\frac{1}{x}}$, e) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cos(\arctan(x))$.

Hinweis: Zeigen und benutzen Sie für e) die Identität $\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}$, wenn $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

AUFGABE 45 (ÜBUNG)

- a) Beweisen Sie: Gilt für die stetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0,$$

so gibt es ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $|f(x)| \leq |f(x_0)|$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

- b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Wenn die Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist und $f(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt, dann ist die Funktion $1/f$ beschränkt.

AUFGABE 46 (TUTORIUM)

- a) Beweisen Sie das Additionstheorem des Tangens:

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ mit } x, y, x+y \notin \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

- b) Zeigen Sie, dass

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

AUFGABE 47 (ÜBUNG)

a) Sei $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass

$$\arg(z) = \begin{cases} +\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & y \geq 0, \\ -\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & y < 0. \end{cases}$$

b) Beweisen Sie die folgenden Darstellungen der Areahyperbolicus-Funktionen auf ihren jeweiligen Definitionsbereichen.

$$\operatorname{Arsinh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad \operatorname{Arcosh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad \operatorname{Artanh}(x) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

AUFGABE 48 (TUTORIUM)

a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil sowie Betrag und Argument von

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^{201}.$$

b) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil von z^3 und z^{150} für $z = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}$.

c) Geben Sie Betrag und Argument von $1 - e^{it}$ für $t \in (0, 2\pi)$ an.