Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

WS 2014/2015
04.03.2015

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zur Bachelor-Modulprüfung

Aufgabe 1 (6+8+6=20 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

b) Sei (a_n) eine beschränkte Folge mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{a_n}{\sum_{k=1}^{n} a_k} \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Hinweis: Unterscheiden Sie danach, ob $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$ beschränkt oder unbeschränkt ist.

c) Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$$

konvergiert.

Lösungsvorschlag

a) Wir zeigen die Aussage per Induktion.
Induktionsanfang ($n = 1$): Es gilt

$$\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2.$$

Induktionsschluss ($n \to n+1$): Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$ (Induktionsvoraussetzung (IV)). Es folgt

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \overset{\text{(IV)}}{=} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n^2+4(n+1))}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

b) Wie im Hinweis beschrieben, unterscheiden wir zwei Fälle.
1. Fall: $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$ beschränkt. Da $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, ist die Folge $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$ monoton und nach oben beschränkt, also nach dem Monotoniekriterium konvergent gegen ein $A > 0$. Daher

gilt nach Vorlesung, dass $a_n \to 0$ für $n \to \infty$. Somit folgt

$$\frac{a_n}{\sum_{k=1}^n a_n} \to \frac{0}{A} = 0$$

für $n \to \infty$.
<u>2. Fall</u>: $\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)$ unbeschränkt. Dann existiert zu jedem $C > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ sodass

$$\left|\sum_{k=1}^n a_k\right| > C \qquad \forall n \geqslant N.$$

Somit konvergiert $\left(\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^{-1}\right)$ gegen 0, denn für jedes ε existiert ein $N \in \mathbb{N}$ (dasjenige von oben mit $C = \varepsilon^{-1}$ mit

$$\left|\frac{1}{\sum_{k=1}^n a_k}\right| < \varepsilon \qquad \forall n \geqslant N,$$

was der Definition der Konvergenz gegen 0 entspricht. Da (a_n) beschränkt ist (durch $a > 0$), folgt somit wegen

$$0 < \frac{a_n}{\sum_{k=1}^n a_n} \leqslant \frac{a}{\sum_{k=1}^n a_n} \to a \cdot 0 = 0$$

für $n \to \infty$ die geforderte Konvergenz.

c) Wir untersuchen die Reihe für festes $x \in \mathbb{R}$ auf Konvergenz mit Hilfe des Quotientenkriteriums. Es folgt

$$\left|\frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}x^{n+1}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n}\right| = \frac{(n+1)^2\,|x|}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{(n+1)\,|x|}{2(2n+1)} = \frac{(1+\frac{1}{n})}{4+\frac{1}{n}} \cdot |x| \xrightarrow{n\to\infty} \frac{|x|}{4}.$$

Somit konvergiert die Reihe für $|x| < 4$ und divergiert für $|x| > 4$. Für $|x| = 4$ ist obiger Quotient gegeben durch

$$\frac{(n+1)\,|x|}{2(2n+1)} = \frac{4n+4}{4n+1} > \frac{4n+1}{4n+1} = 1,$$

womit die Reihe nach Vorlesung divergiert. Also konvergiert die Potenzreihe genau für $|x| < 4$.

Aufgabe 2 (8+8+4=20 Punkte)

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x^4 e^{-x^2/4} \sin(8/x^3) & , x \neq 0, \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass f differenzierbar auf $\mathbb{R}$ ist und die Ableitung durch

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-x^2/4}\left(4x^3 \sin(8/x^3) - \frac{x^5}{2}\sin(8/x^3) - 24\cos(8/x^3)\right) & , x \neq 0, \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$$

gegeben ist. Begründen Sie ihre Rechnung dabei ausführlich.

b) Zeigen Sie, dass $|f'(x)| < 24$ für alle $x \in [-1,1]$. Finden Sie danach passende Folgen, um zu beweisen, dass $\sup_{x\in[-1,1]} f'(x) = 24$ und $\inf_{x\in[-1,1]} f'(x) = -24$.

Hinweis: Nutzen Sie für die erste Ungleichung $\mathrm{e}^{y^2} \geqslant 1 + y^2$ und für einen Teil der Potenzen von x die Tatsache, dass $|x| \leqslant 1$ ist.

c) Verwenden Sie Teil **b)**, um f' auf Stetigkeit zu untersuchen.

Lösungsvorschlag

a) Für $x \neq 0$ ist f als Komposition differenzierbarer Funktionen differenzierbar. Sie ist das Produkt der drei Funktionen f_1, f_2, f_3 mit

$$f_1(x) = x^4, \quad f_2(x) = \mathrm{e}^{-x^2/4}, \quad f_3(x) = \sin(8/x^3),$$

die die Ableitung

$$f_1'(x) = 4x^3, \quad f_2'(x) = -\frac{x}{2}\mathrm{e}^{-x^2/4}, \quad f_3'(x) = -\frac{24}{x^4}\cos(8/x^3)$$

besitzen (für f_2 und f_3 mit Kettenregel). Mit der Produktregel folgt nun

$$\begin{aligned} f'(x) &= f_1'(x)f_2(x)f_3(x) + f_1(x)f_2'(x)f_3(x) + f_1(x)f_2(x)f_3'(x) \\ &= 4x^3 \cdot \mathrm{e}^{-x^2/4}\sin(8/x^3) - x^4 \cdot \frac{x}{2}\mathrm{e}^{-x^2/4} \cdot \sin(8/x^3) - x^4\mathrm{e}^{-x^2/4} \cdot \frac{24}{x^4}\cos(8/x^3) \\ &= \mathrm{e}^{-x^2/4}\left(4x^3\sin(8/x^3) - \frac{x^5}{2}\sin(8/x^3) - 24\cos(8/x^3)\right). \end{aligned}$$

Für $x \neq 0$ folgt außerdem wegen $|\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}|, |\sin(8/x^3)| \leqslant 1$, dass

$$\left|\frac{f(x) - f(0)}{x}\right| = |x^3\mathrm{e}^{-x^2/4}\sin(8/x^3)| \leqslant |x|^3 \to 0$$

für $x \to 0$, womit f in 0 differenzierbar ist mit $f'(0) = 0$.

b) Mit dem Hinweis folgt $\mathrm{e}^{-x^2/4} \leqslant (1 + \frac{x^2}{4})^{-1}$ und somit für $|x| \leqslant 1$ ($x \neq 0$), wegen $|\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}|, |\sin(8/x^3)| \leqslant 1$, dass

$$|f'(x)| \leqslant \frac{|4x^3\sin(8/x^3)| + |\frac{x^5}{2}\sin(8/x^3)| + |24\cos(8/x^3)|}{1 + \frac{x^2}{4}} \leqslant \frac{24 + \frac{9x^2}{2}}{1 + \frac{x^2}{4}} < \frac{24 + 6x^2}{1 + \frac{x^2}{4}} = 24,$$

womit f' die Werte ± 24 nicht annimmt. Es gilt jedoch für $x_n = \sqrt[3]{\frac{4}{n\pi}}$, $y_n = \sqrt[3]{\frac{8}{(2n+1)\pi}}$, dass $x_n, y_n \to 0$ und

$$\cos(8/x_n^3) = 1, \quad \cos(8/y_n^3) = -1, \quad \sin(8/x_n^3) = \sin(8/y_n^3) = 0$$

und daher

$$f'(x_n) \to -24, \qquad f'(y_n) \to 24$$

für $n \to \infty$. Da ± 24 eine obere/untere Schranke von f' auf $[-1,1]$ ist, folgt $\sup_{x\in[-1,1]} f'(x) = 24$ und $\inf_{x\in[-1,1]} f'(x) = -24$.

c) Offensichtlich ist f' stetig in $x \neq 0$ als Komposition stetiger Funktionen. Wäre f' auch in 0 stetig, so würde f' auf der kompakten Menge sein Maximum und Minimum annehmen, was jedoch laut **b)** nicht der Fall ist. Alternativ sind in Teil **b)** passende Folgen gegeben, die direkt die Unstetigkeit von f' in 0 beweisen.

Aufgabe 3 (6+6+4+4=20 Punkte)

a) Für $n \in \mathbb{N}$ seien die Funktionen

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2},$$

gegeben. Zeigen Sie, dass (f_n) gleichmäßig, (f_n') jedoch nur punktweise konvergiert und geben Sie jeweils die Grenzfunktion an.
Hinweis: Beachten Sie für (f_n) die Ungleichung $0 \leqslant (1-\sqrt{n}|x|)^2$.

b) Zeigen Sie, dass die Gleichung $x(x-\sin(x)) = \cos(x)$ genau zwei Lösungen in $[-\pi, \pi]$ besitzt.

c) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x\to 0+} \frac{\log(\sqrt{x})}{e^{\frac{1}{x^2}}}$ und folgern sie daraus, dass

$$\lim_{x\to 0+} (\sqrt{x})^{e^{-1/x^2}} = 1.$$

d) Beweisen Sie die Monotonie der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^x (1+4t)e^{t^2}\, dt + xe^{x^2}.$$

Lösungsvorschlag

a) Es gilt $f_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $0 \leqslant (1-\sqrt{n}|x|)^2 = 1 + nx^2 - 2\sqrt{n}|x|$ folgt $1 + nx^2 \geqslant 2\sqrt{n}|x|$ und somit für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{|x|}{2\sqrt{n}|x|} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Somit konvergiert f_n gleichmäßig gegen die Nullfunktion. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt weiter

$$f_n'(x) = \frac{(1+nx^2) - 2nx \cdot x}{(1+nx^2)^2} = \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2} = \begin{cases} 1 & , x = 0, \\ \frac{\frac{1}{n^2} - \frac{x^2}{n}}{(\frac{1}{n}+x^2)^2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{0-0}{(0+x^2)^2} = 0 & , x \neq 0. \end{cases}$$

Da die Grenzfunktion unstetig ist, kann die Konvergenz nicht gleichmäßig sein.

b) Lösungen der Gleichung sind Nullstellen der Funktion $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - x\sin(x) - \cos(x)$. Es gilt $g(0) = -1 < 0$, $g(\pm\pi) = \pi^2 + 1 > 0$. Somit besitzt g nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle in $(-\pi, 0)$ und eine in $(0, \pi)$, also mindestens zwei Nullstellen.
Nach dem Satz von Rolle liegt zwischen zwei Nullstellen von g eine Nullstelle von g', das gegeben ist durch

$$g'(x) = 2x - \sin(x) - x\cos(x) + \sin(x) = x(2-\cos(x)) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Gäbe es eine dritte Nullstelle von g, dann würde eine weitere Nullstelle von g' existieren, womit g genau zwei Nullstellen besitzt.

c) Es gilt

$$(\sqrt{x})^{(e^{-\frac{1}{x^2}})} = e^{\log(\sqrt{x})e^{-\frac{1}{x^2}}}$$

Nun gilt $e^{\frac{1}{x^2}} \to \infty$, also folgt mit der Regel von L'Hospital, dass

$$\lim_{x\to 0+} \log(\sqrt{x})e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\log(\sqrt{x})}{e^{\frac{1}{x^2}}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{-\frac{2}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to 0+} -\frac{x^2}{4} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Da die Exponentialfunktion stetig ist, folgt schließlich

$$\lim_{x\to 0+} (\sqrt{x})^{(e^{-\frac{1}{x^2}})} = \lim_{x\to 0+} e^{\log(\sqrt{x})e^{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim_{x\to 0+} \log(\sqrt{x})e^{-\frac{1}{x^2}}} = e^0 = 1.$$

d) f ist nach dem Hauptsatz differenzierbar, da der Integrand stetig ist. Es gilt

$$f'(x) = (1+4x)e^{(x^2)} + e^{(x^2)} + 2x^2 e^{(x^2)} = 2(x^2+2x+1)e^{(x^2)} = 2(x+1)^2 e^{(x^2)} \geqslant 0.$$

Somit ist f laut Vorlesung monoton wachsend.

Aufgabe 4 (6+6+8=20 Punkte)

a) Finden Sie die maximale Lösung des Anfangswertproblems.

$$y' = -\frac{1}{x}\frac{y^2+6y+5}{2y+6}, \qquad y(1) = 0.$$

b) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \sin\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$$

divergiert.
Hinweis: Nutzen Sie die Substitution $y = \frac{1}{x}$.

c) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ den Kern der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 10 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Lösungsvorschlag

a) Mit den Funktionen $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{1}{x}$, und $g : (-1,\infty)$, $g(y) = \frac{y^2+6y+5}{2y+6}$, sind f und g stetig sowie g nullstellenfrei (da $y^2+6y+5 = (y+1)(y+5)$). Schreiben wir y' als $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, liefert

Separation

$$\frac{2y+6}{y^2+6y+5}\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Durch Integration erhalten wir (für $y > -1$ und $x > 0$)

$$\log(y^2+6y+5) - \log(5) = \log(s^2+6s+5)\big|_{s=2}^{y} = \int_2^y \frac{2s+6}{s^2+6s+5}\,\mathrm{d}s = \int_1^x -\frac{1}{s}\,\mathrm{d}s = -\log(x)$$

Nun bringen wir $\log(5)$ auf die rechte Seite und wenden die Exponentialfunktion an. Dies führt auf

$$y^2+6y+5 = \frac{5}{x} \quad \Longleftrightarrow \quad (y+3)^2 = \frac{5}{x}+4, \quad c_2 \in \mathbb{R}.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist daher gegeben durch eine der beiden Funktionen

$$y(x) = -3 \pm \sqrt{\frac{5}{x}+4}.$$

Das Vorzeichen erhalten wir durch Einsetzen des Anfangswertes. Mit $y(1) = 0$ erhalten das positive Vorzeichen vor der Wurzel. Die Lösung lautet also

$$y(x) = \sqrt{\frac{5}{x}+4} - 3 \quad \text{für } x > 0.$$

b) Mit der Substitution $y = \frac{1}{x}$ ($\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{x^2} = -y^2$) folgt für $R > 1$, dass

$$\int_1^R \sin\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \int_1^{\frac{1}{R}} \frac{\sin(y)}{-y^2}\,\mathrm{d}y = \int_{\frac{1}{R}}^1 \frac{\sin(y)}{y}\cdot\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y.$$

Da die Funktion $\frac{\sin(y)}{y}$ - in 0 fortgesetzt durch den Grenzwert 1 - beschränkt und positiv auf $[0,1]$ ist, existiert insbesondere das positive Minumum c der Funktion und es folgt

$$c\int_{\frac{1}{R}}^1 \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y \leqslant \int_{\frac{1}{R}}^1 \frac{\sin(y)}{y}\cdot\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y.$$

Da der Grenzwert des linken Integrals für $R \to \infty$ nicht existiert, also

$$\int_0^1 \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y$$

nicht konvergiert, konvergiert auch das rechte Integral nicht nach dem Minorantenkriterium. Somit divergiert auch das Ausgangsintegral.

c) Wir führen folgende Zeilenumformungen durch:

$$
\begin{aligned}
B &= \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 10 & \alpha \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 6 & 2 \\ 0 & 8 & -4 & 8 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 10 & \alpha \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 10 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -16 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & 10 & \alpha \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -16 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & 10 & \alpha \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid \cdot \frac{1}{2} \\ \mid \cdot \frac{1}{4} \\ \\ \end{array} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 10 & \alpha \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha-4 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Für $\alpha = 4$ ist dies die Zeilennormalform. Der Kern von A ist (z.B. mit dem (-1)-Trick) gegeben durch

$$
\operatorname{lin}\left(\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).
$$

Für $\alpha \neq 4$, so ist

$$
B \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha-4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \mid \cdot \frac{1}{\alpha-4} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

die Zeilennormalform von B. Der Kern von A ist daher gegeben durch

$$
\operatorname{lin}\left(\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).
$$