Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

Aufgabe 19 (Übung)

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Ist p ein (komplexes) Polynom ungleich der konstanten Nullfunktion, so folgt

$$\sqrt[n]{|p(n)|} \to 1 \qquad (n \to \infty).$$

b) Die Folge (a_n) sei gegeben durch die Folgenglieder $a_n = (1 - \frac{1}{n})^n$. Zeigen Sie, dass (a_n) konvergiert mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

Lösungsvorschlag

a) Unser allgemeines Polynom hat die Form

$$p(n) = \sum_{k=0}^{N} a_k n^k$$

mit $a_k \in \mathbb{C}$ und einem festen $N \in \mathbb{N}_0$ (ohne Beschränkung sei $a_N \neq 0$). Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $\sqrt[n]{n} \to 1$ für $n \to \infty$. Multiplizieren wir diese Folge N mal mit sich selbst und nutzen die entsprechende Eigenschaft aus der Vorlesung zur Konvergenz von Produkten, so ergibt sich auch $\sqrt[n]{n^N} \to \infty$ für $n \to \infty$. Zudem gilt $\sqrt[n]{c} \to 1$ für alle Konstanten $c \geqslant 0$. Somit ist die Behauptung bereits bewiesen, falls $a_0 = \ldots = a_{N-1} = 0$. Sei also mindestens eine dieser Zahlen nicht Null. Nun beobachten wir, dass

$$|p(n)| \leqslant \sum_{k=0}^{N} |a_k| n^k \leqslant \left(\sum_{k=0}^{N} |a_k| \right) n^N$$

und

$$|p(n)| \geqslant |a_N| n^N - \left| \sum_{k=0}^{N-1} a_k n^k \right| \geqslant |a_N| n^N - \sum_{k=0}^{N-1} |a_k| n^k \geqslant |a_N| n^N - \left(\sum_{k=0}^{N-1} |a_k| \right) n^{N-1} = n^N \left(|a_N| - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{N-1} |a_k| \right).$$

Wir wählen $n \geqslant \frac{2\sum_{k=0}^{N-1} |a_k|}{|a_N|}$ (und bemerken, dass wir nicht durch Null dividieren), sodass $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{N-1} |a_k| \leqslant \frac{|a_N|}{2}$ und somit $|p(n)| \geqslant \frac{|a_N|}{2} n^N$ gilt. Insgesamt gilt also für jedes feste n, welches groß genug ist, dass

$$\frac{|a_N|}{2} n^N \leqslant |p(n)| \leqslant \left(\sum_{k=0}^{N} |a_k| \right) n^N$$

und somit schließlich (wir benutzen Lemma 4.13)

$$1 = 1 \cdot 1 \leftarrow \sqrt[n]{\frac{|a_N|}{2}} \sqrt[n]{n^N} \leqslant \sqrt[n]{|p(n)|} \leqslant \sqrt[n]{\left(\sum_{k=0}^{N} |a_k| \right)} \sqrt[n]{n^N} \to 1 \cdot 1 = 1$$

für $n \to \infty$. Nach Satz 6.2(3) folgt die Behauptung.

b) Wir beobachten, dass (für $n \geqslant 2$)

$$a_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}.$$

Der Nenner des ersten Bruchs konvergiert gegen e nach Vorlesung (n ist hier durch $n-1$ ersetzt, was die Folgenglieder nur um eine Position verschiebt, aber nichts an der Konvergenz ändert). Der Nenner des zweiten Bruchs konvergiert gegen 1. Ingesamt folgt also, nach den Rechenregeln für die Konvergenz von Produkten und Quotienten, dass (a_n) konvergiert mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

Aufgabe 20 (Tutorium)

a) Untersuchen Sie nachstehende Folgen ($n \in \mathbb{N}$) auf Konvergenz und geben Sie, falls existent, ihren Grenzwert an.

(i) $a_n = (1+\frac{1}{n^2})^n$, (ii) $b_n = (1+\frac{1}{2n+1})^{n-1}$.

b) Es sei $x \in (0,\infty)$ und (a_n) rekursiv definiert durch

$$a_1 > \sqrt{x} \quad \text{und} \quad a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right).$$

Zeigen Sie: (a_n) ist konvergent und $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{x}$.

Lösungsvorschlag

a) (i) Es gilt

$$a_n = \sqrt[n]{(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}}.$$

Der Ausdruck in der Wurzel ist eine Teilfolge der Folge mit den Folgengliedern $(1+\frac{1}{k})^k$ (für $k = n^2$), die laut Vorlesung konvergiert und somit beschränkt ist, genauer zwischen 2 und 3 liegt. Dies gilt demnach auch für die Glieder der Teilfolge, also folgt

$$\sqrt[n]{2} \leqslant \sqrt[n]{(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}} \leqslant \sqrt[n]{3}.$$

Da die Ausdrücke links und rechts laut Vorlesung jeweils gegen 1 konvergieren, folgt nach Vorlesung auch

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

(ii) Es gilt

$$b_n = \sqrt{(1+\frac{1}{2n+1})^{2(n-1)}} = \sqrt{(1+\frac{1}{2n+1})^{2n+1} \cdot (1+\frac{1}{2n+1})^{-3}}.$$

Der erste Term unter der Wurzel ist eine Teilfolge der Folge mit den Gliedern $(1+\frac{1}{k})^k$. Da diese Folge gegen e konvergiert, tut es auch diese Teilfolge (mit $n_k = 2k+1$). Der zweite Ausdruck unter der Wurzel konvergiert offensichtlich gegen $(1+0)^{-3} = 1$. Aus der Vorlesung ist nun bekannt, dass die Wurzel einer Folge gegen die Wurzel des Grenzwertes konvergiert, was zusammen mit der Produkteigenschaft

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \sqrt{\mathrm{e}}$$

ergibt.

b) *Voraussetzung:* Es sei $x \in (0,\infty)$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch

$$a_1 > \sqrt{x} \;\text{ und }\; a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right).$$

Behauptung: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{x}$.

Beweis:
(i) Wir zeigen zuerst die Voraussetzungen von Satz 6.3.
"Beschränktheit nach unten": Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion. Dazu sei die Aussage

$$a_n - \sqrt{x} > 0 \qquad (A(n))$$

für $n \in \mathbb{N}$ definiert.

(IA) $A(1)$ ist per Definition wahr.

(IS) Sei nun $A(n)$ wahr für ein $n \in \mathbb{N}$ (IV). Dann folgt

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \sqrt{x} &= \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right) - \sqrt{x} = \frac{1}{2a_n}\left(a_n^2 - 2\sqrt{x}a_n + x\right) \\ &= \frac{1}{2a_n}\left(a_n - \sqrt{x}\right)^2 \overset{(IV)}{>} 0. \end{aligned}$$

Insgesamt gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \; a_n > \sqrt{x}.$$

"Monotonie": Es folgt für $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right) < \frac{1}{2}(a_n + a_n) = a_n.$$

Damit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton fallend.

Nach dem Monotoniekriterium folgt, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist.

(ii) Sei $\alpha := \lim_{n\to\infty} a_n$. Es gilt nach Satz 6.2(2) $\alpha \geq \sqrt{x} > 0$. Da nun $a_n \to \alpha$ und $\alpha_{n+1} \to \alpha$ für $n \to \infty$, folgt, dass α die Gleichung

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{x}{\alpha}\right)$$

erfüllen muss. Da $\alpha \geq \sqrt{x} > 0$, gilt

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{x}{\alpha}\right) \;\Leftrightarrow\; \alpha^2 = x.$$

Also $\alpha \in \{-\sqrt{x}, \sqrt{x}\}$ und wegen $\alpha \geq \sqrt{x}$ muss $\alpha = \sqrt{x}$ gelten.

Aufgabe 21 (Übung)

a) Sie (a_n) eine Folge. Zeigen Sie: (a_n) ist konvergent $\Leftrightarrow$ (a_n) ist eine Cauchyfolge.

b) Wir betrachten die durch

$$a_1 := 1, \quad a_{n+1} := \frac{2+a_n}{1+a_n} \quad (n \geqslant 2)$$

rekursiv definierte Folge (a_n).

(i) Zeigen Sie, dass $1 \leqslant a_n \leqslant 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Beweisen Sie, dass $|a_n - a_m| \leqslant \frac{1}{4}|a_{n-1} - a_{m-1}|$ für alle $n, m \geqslant 2$.

(iii) Folgern Sie, dass die Folge (a_n) konvergiert und berechnen Sie ihren Grenzwert.

Lösungsvorschlag

a) "$\Rightarrow$": Sei (a_n) konvergent gegen a und $\varepsilon > 0$ beliebig. Es existiert ein $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n \geqslant n_0(\varepsilon).$$

Dann gilt für $m, n \geqslant n_0(\varepsilon)$, dass

$$|a_n - a_m| \leqslant |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

womit (a_n) eine Cauchyfolge ist.
"$\Leftarrow$": Sei (a_n) eine Cauchyfolge. Es existiert ein $n_0(1) \in \mathbb{N}$, sodass

$$|a_n - a_m| < 1 \qquad \forall m, n \geqslant n_0(1).$$

Nach Satz 6.6 hat (a_n) eine monotone Teilfolge. Außerdem ist die komplette Folge, also insbesondere diese Teilfolge, beschränkt, denn für $n \geqslant n_0(1)$ gilt

$$|a_n| \leqslant |a_n - a_{n_0(1)}| + |a_{n_0(1)}| < 1 + |a_{n_0(1)}| =: C < \infty$$

und die restlichen, endlich vielen Folgenglieder ändern nichts an dieser Beschränktheit. Diese monotone Teilfolge, die wir (a_{n_k}) nennen, ist also konvergent gegen ein a. Es bleibt zu zeigen, dass die gesamte Folge (a_n) gegen dieses a konvergiert. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Es gibt $n_0(\varepsilon), k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall m, n \geqslant n_0(\varepsilon)$$

und

$$|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall k \geqslant k_0(\varepsilon).$$

Nun wählen wir ein festes $k \in \mathbb{N}$ mit $n_k \geqslant n_0(\varepsilon)$ und $k \geqslant k_0(\varepsilon)$. Für $n \geqslant n_0(\varepsilon)$ gilt

$$|a_n - a| \leqslant |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

womit die Konvergenz gezeigt ist.

b) (i) Dies zeigen wir induktiv. Für $n = 1$ ist die Aussage trivial (IA), also setzen wir sie für ein $n \in \mathbb{N}$ voraus (IV). Induktionsschluss:

$$a_{n+1} = \frac{2 + a_n}{1 + a_n} \overset{\text{(IV)}}{\leqslant} \frac{2+2}{1+1} = 2,$$

$$a_{n+1} = \frac{2 + a_n}{1 + a_n} \overset{\text{(IV)}}{\geqslant} \frac{2+1}{1+2} = 1.$$

(ii) Seien $n, m \geqslant 2$. Es folgt nach Definition und (i), dass

$$\begin{aligned}|a_n - a_m| &= \left|\frac{2 + a_{n-1}}{1 + a_{n-1}} - \frac{2 + a_{m-1}}{1 + a_{m-1}}\right| = \left|\frac{(2 + a_{n-1})(1 + a_{m-1}) - (2 + a_{m-1})(1 + a_{n-1})}{(1 + a_{n-1})(1 + a_{m-1})}\right| \\ &= \left|\frac{a_{m-1} - a_{n-1}}{(1 + a_{n-1})(1 + a_{m-1})}\right| = \frac{|a_{m-1} - a_{n-1}|}{(1 + a_{n-1})(1 + a_{m-1})} \leqslant \frac{1}{4}|a_{m-1} - a_{n-1}|.\end{aligned}$$

(iii) Durch induktives Anwenden von (ii) und letzlicher Verwendung von (i) folgern wir für $n, m \geqslant n_0 \geqslant 2$ (ohne Beschränkung sei $n \geqslant m$), dass

$$|a_n - a_m| \leqslant \frac{1}{4}|a_{n-1} - a_{m-1}| \leqslant \cdots \leqslant \frac{1}{4^{m-1}}|a_{n-m+1} - a_1| \leqslant \frac{1}{4^{m-1}}(|a_{n-m+1}| + |a_1|) \overset{\text{(i)}}{\leqslant} \frac{1}{4^{m-2}} \leqslant \frac{1}{4^{n_0-2}}.$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert nun ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{4^{n_0-2}} < \varepsilon$, sodass (a_n) eine Cauchyfolge ist. Somit ist (a_n) konvergent. Aus der rekursiven Formel folgt der Grenzwert a durch Grenzwertbildung auf beiden Seiten mit dem Zusatz, dass mit den Folgengliedern auch der Grenzwert zwischen 1 und 2 liegt.

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + a_n}{1 + a_n} = \frac{2 + a}{1 + a} \Leftrightarrow a(1 + a) = 2 + a \Leftrightarrow a^2 = 2 \overset{(i)}{\Leftrightarrow} a = \sqrt{2}$$

Aufgabe 22 (Tutorium)

a) Sei (a_n) eine Folge und die Teilfolgen (a_{2k}), (a_{2k+1}) und (a_{3k}) konvergieren. Beweisen oder widerlegen Sie (durch ein Gegenbeispiel), dass (a_n) konvergiert.

b) Finden Sie Beispiele für Folgen mit den folgenden Eigenschaften:

(i) (a_n) hat genau die Zahlen 2 und -1 als Häufungswerte.

(ii) (b_n) hat jede natürliche Zahl als Häufungswert.

(iii) (c_n) hat keinen Häufungswert und ist weder nach oben noch nach unten beschränkt.

(iv) (d_n) konvergiert gegen 2018, ist aber nicht monoton.

(v) (e_n) hat 0 als einzigen Häufungswert, jedoch konvergiert $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht.

Lösungsvorschlag

a) (a_n) konvergiert nach **Aufgabe 21 b)**, da die beiden Teilfolgen (a_{2k}) und (a_{2k+1}) denselben Grenzwert haben. Hätten sie verschiedene Grenzwerte, so hätten auch die jeweiligen Teilfolgen (a_{6k}) und (a_{6k+3}) verschiedene Grenzwerte. Dies sind jedoch beides auch Teilfolgen von (a_{3k}), welches eine konvergente Folge ist, ein Widerspruch.

b) Es wird jeweils ein Beispiel genannt, von denen es noch viele mehr gibt.

(i) $a_n := \frac{1}{2} + \frac{3}{2}(-1)^n$ für $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $(b_n) := (1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \ldots)$.

(iii) $c_n := (-1)^n n$ für $n \in \mathbb{N}$.

(iv) $d_n := 2018 + \frac{(-1)^n}{n}$.

(v) $e_{2k} := 0$, $e_{2k+1} := k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 23 (Übung)

a) Seien (a_n) und (b_n) reelle, beschränkte Folgen. Zeigen Sie, dass

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leqslant \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$$

und finden Sie ein Beispiel um zu zeigen, dass im Allgemeinen keine Gleichheit gilt.

b) Seien M_1 und M_2 zwei abzählbare Mengen. Zeigen Sie, dass auch $M_1 \times M_2$ abzählbar ist.

Lösungsvorschlag

a) Seien (a_n) und (b_n) beschränkte Folgen in $\mathbb{R}$. Dann ist auch $(a_n + b_n)$ beschränkt und gemäß Definition gilt

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k + b_k : k \geq n\}.$$

Wegen $\{a_k + b_k : k \geq n\} \subset \{a_k + b_l : k, l \geq n\}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt nach Satz 4.3: $\sup\{a_k + b_k : k \geq n\} \leq \sup\{a_k + b_l : k, l \geq n\}$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) &= \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k + b_k : k \geq n\} \leq \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k + b_l : k, l \geq n\} \\
&\overset{\textbf{A7b)}}{=} \lim_{n\to\infty}\Big(\sup\{a_k : k \geq n\} + \sup\{b_l : l \geq n\}\Big) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k : k \geq n\} + \lim_{n\to\infty} \sup\{b_l : l \geq n\} \\
&= \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.
\end{aligned}$$

Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} := ((-1)^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, so gilt $a_n + b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daher ist

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 0 < 1 + 1 = \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

b) Die Tatsache, dass $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar ist, folgt mit dem Vorgehen, mit dem in der Vorlesung gezeigt wurde, dass $\mathbb{Q}$ abzählbar ist. Anstatt eine natürliche Zahl im Zähler und eine im Nenner stehen zu haben, stehen sie nun als Paar nebeneinander.
Können wir nun eine surjektive Abbildung von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nach $M_1 \times M_2$ finden, dann können wir die beiden Abbildungen verknüpfen um eine surjektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $M_1 \times M_2$ (diese Abbildung ist wieder surjektiv nach **Aufgabe 5**).
Da M_1 und M_2 abzählbar sind, existieren surjektive Abbildungen $f_1 : \mathbb{N} \to M_1$ bzw. $f_2 : \mathbb{N} \to M_1$. Definiere

$$g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to M_1 \times M_2, \quad (m, n) \mapsto (f_1(m), f_2(n)).$$

Diese Abbildung bildet tatsächlich von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nach $M_1 \times M_2$ ab und ist injektiv, da wir zu $(m_1, m_2) \in M_1 \times M_2$ einfach (m, n) so wählen, dass $f_1(m) = m_1$ und $f_2(n) = m_2$ gilt, womit

$g(m,n) = (m_1, m_2)$. Möglich ist dieses Finden von m und n wegen der Surjektivität von f_1 und f_2.

Aufgabe 24 (Tutorium)

Bestimmen Sie alle Häufungswerte von (a_n) und geben Sie $\liminf_{n\to\infty} a_n$ und $\limsup_{n\to\infty} a_n$ an.

a) $a_n := (3 + (-1)^n)(-1)^{n(n+1)/2}$,

b) $a_n := (-1)^n \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n-1}$,

c) $a_n := \sqrt[n]{n + (-1)^n n}$,

d) $a_n := \left(-1 + \frac{1}{2} \cdot (-1)^{n+1}\right)^{n+1}$

e) $a_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2^n}, & n = 3k \quad \text{für ein } k \in \mathbb{N} \\ 2, & n = 3k-1 \quad \text{für ein } k \in \mathbb{N} \\ 2 + \frac{n+1}{n}, & n = 3k-2 \quad \text{für ein } k \in \mathbb{N} \end{cases}.$

Lösungsvorschlag

a) Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\begin{aligned}
a_{4k+1} &= (3-1)(-1)^{(4k+1)(2k+1)} = 2 \cdot (-1) = -2 \to -2 \quad \text{für } k \to \infty, \\
a_{4k+2} &= (3+1)(-1)^{(2k+1)(4k+3)} = 4 \cdot (-1) = -4 \to -4 \quad \text{für } k \to \infty, \\
a_{4k+3} &= (3-1)(-1)^{2\cdot(4k+3)(k+1)} = 2 \cdot (+1) = 2 \to 2 \quad \text{für } k \to \infty, \\
a_{4k+4} &= (3+1)(-1)^{2\cdot(k+1)(2k+5)} = 4 \cdot (+1) = 4 \to 4 \quad \text{für } k \to \infty.
\end{aligned}$$

Da diese vier Teilfolgen die komplette Folge abdecken folgt $H(a_n) = \{-4, -2, 2, 4\}$ und somit

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = 4, \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = -4.$$

b) Es gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$\tilde{a}_n := \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n-1} = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}_{\to e(n\to\infty)} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-2}}_{\to 1(n\to\infty)} \to e(n \to \infty).$$

Nach Vorlesung konvergiert dann jede Teilfolge von $(\tilde{a}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen e.
Wegen $\mathbb{N} = \{2k \ : \ k \in \mathbb{N}\} \cup \{2k-1 \ : \ k \in \mathbb{N}\}$ und

$$a_{2k} = (-1)^{2k} \tilde{a}_{2k} \to e(k \to \infty) \qquad \text{sowie} \qquad a_{2k-1} = (-1)^{2k-1} \tilde{a}_{2k-1} \to -e(k \to \infty)$$

folgt $H(a_n) = \{-e, e\}$ und somit

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}, \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = -\mathrm{e}.$$

c) Wir definieren die beiden Teilfolgen $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ durch $b_k := a_{2k}$ bzw. $c_k := a_{2k-1}$, jeweils für alle $k \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$b_k = \sqrt[2k]{4k} = \sqrt[2k]{2} \cdot \sqrt[2k]{2k}.$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Da Teilfolgen von konvergenten Folgen gegen denselben Grenzwert wie die Folge konvergieren und weil $\sqrt[n]{2} \to 1$ und $\sqrt[n]{n} \to 1$ für $n \to \infty$ gilt, haben wir

$$b_k = \sqrt[2k]{2} \cdot \sqrt[2k]{2k} \to 1 \cdot 1 = 1$$

für $k \to \infty$. Des Weiteren ist

$$c_k = \sqrt[k]{0} = 0 \to 0$$

für $k \to \infty$. Somit sind 0 und 1 die Häufungswerte von $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = 1, \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = 0.$$

d) Wir definieren die beiden Teilfolgen $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ durch $b_k := a_{2k}$ bzw. $c_k := a_{2k-1}$, jeweils für alle $k \in \mathbb{N}$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$b_k = \left(-1 + \frac{1}{2} \cdot (-1)^{2k+1}\right)^{2k+1} = \left(-\frac{3}{2}\right)^{2k+1} = -\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^k.$$

Die Teilfolge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist also nach unten unbeschränkt. Da jede Teilfolge von $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ebenfalls nach unten unbeschränkt ist, hat $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ keinen Häufungswert. Weiter gilt

$$c_k = \left(-1 + \frac{1}{2} \cdot (-1)^{2k}\right)^{2k} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k} = \left(\frac{1}{4}\right)^k \to 0$$

für $k \to \infty$. Somit ist 0 ein Häufungswert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Damit es weitere Häufungswerte geben könnte, müsste eine Teilfolge von (a_n) existieren, die gegen einen weiteren Wert außer 0 konvergiert. Jede Teilfolge hat jedoch entweder unendlich viele Glieder aus (b_k) oder (c_k), womit sie entweder divergiert (sobald sie unendlich viele Glieder aus (c_k) besitzt) oder gegen 0 konvergiert (sofern sie ausschließlich unendlich viele Glieder aus (b_k) besitzt. Somit ist 0 der einzige Häufungspunkt von d_n und die Folge ist nach unten unbeschränkt, also folgt

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = 0, \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

e) Wir betrachten die drei Teilfolgen (a_{3k}), (a_{3k-1}) und (a_{3k-2}). Es gilt

$$a_{3k} = 1 + \frac{1}{8^k} \to 1, \qquad a_{3k-1} = 2, \qquad a_{3k-2} = 2 + \frac{(3k-2)+1}{3k-2} = 3 + \frac{1}{3k-2} \to 3 \quad (k \to \infty).$$

Da die drei Teilfolgen die komplette Folge abdecken, ist die Folge beschränkt und der Limes Superior/Inferior der größte/kleinste Häufungswert.

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = 3, \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = 1.$$