Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 6. Übungsblatt

Aufgabe 31 (Übung)

a) Rechnen Sie nach, dass die aus der Vorlesung auf $\mathbb{R}$ bekannten Formeln

$$e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z), \qquad \sin^2(z) + \cos^2(z) = 1,$$

auch für $z \in \mathbb{C}$ gelten.

b) Zeigen Sie, dass die Sinusfunktion ungerade und die Kosinusfunktion gerade ist, also

$$\sin(-z) = -\sin(z), \qquad \cos(-z) = \cos(z),$$

für alle $z \in \mathbb{C}$.

c) Beweisen Sie, dass für $z = x + iy$

$$\sin(z) = \sin(x)\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) + i\cos(x)\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right),$$

$$\cos(z) = \cos(x)\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) - i\sin(x)\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right),$$

und schließen Sie daraus, dass die beiden Funktionen auf $\mathbb{C}$ unbeschränkt sind.

Lösungsvorschlag

a) Wir fangen auf der rechten Seite der ersten Gleichung an und beobachten, dass

$$\cos(z) + i\sin(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) + \frac{i}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz} + e^{iz} - e^{-iz}) = e^{iz}.$$

Zudem gilt

$$\sin^2(z) + \cos^2(z) = \frac{1}{4}(e^{iz} + e^{-iz})^2 - \frac{1}{4}(e^{iz} - e^{-iz})^2 = \frac{1}{4}(e^{2iz} + 2 + e^{-2iz} - (e^{2iz} - 2 + e^{-2iz})) = 1.$$

b) Es gilt

$$\sin(-z) = \frac{1}{2i}(e^{i(-z)} - e^{-i(-z)}) = -\frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = -\sin(z)$$

und

$$\cos(-z) = \frac{1}{2}(e^{i(-z)} + e^{-i(-z)}) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \cos(z)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Alternativ erkennt man diese Gleichungen auch an der Potenzreihenentwicklung, da jeweils nur ungerade beziehungsweise gerade Potenzen von z auftauchen.

c) Es gilt

$$\begin{aligned}\sin(z) &= \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-y} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{y}) = \frac{1}{2\mathrm{i}}((\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x))\mathrm{e}^{-y} - (\cos(x) - \mathrm{i}\sin(x))\mathrm{e}^{y}) \\ &= \sin(x)\left(\frac{\mathrm{e}^{y} + \mathrm{e}^{-y}}{2}\right) + \cos(x)\left(\frac{\mathrm{e}^{-y} - \mathrm{e}^{y}}{2\mathrm{i}}\right) = \sin(x)\left(\frac{\mathrm{e}^{y} + \mathrm{e}^{-y}}{2}\right) + \mathrm{i}\cos(x)\left(\frac{\mathrm{e}^{y} - \mathrm{e}^{-y}}{2}\right)\end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned}\cos(z) &= \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-y} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{y}) = \frac{1}{2}((\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x))\mathrm{e}^{-y} + (\cos(x) - \mathrm{i}\sin(x))\mathrm{e}^{y}) \\ &= \cos(x)\left(\frac{\mathrm{e}^{y} + \mathrm{e}^{-y}}{2}\right) + \mathrm{i}\sin(x)\left(\frac{\mathrm{e}^{-y} - \mathrm{e}^{y}}{2}\right) = \cos(x)\left(\frac{\mathrm{e}^{y} + \mathrm{e}^{-y}}{2}\right) - \mathrm{i}\sin(x)\left(\frac{\mathrm{e}^{y} - \mathrm{e}^{-y}}{2}\right).\end{aligned}$$

Für die Unbeschränktheit begeben wir uns auf die imaginäre Achse (also $x = 0$ und somit $\sin(x) = 0$, $\cos(x) = 1$). Es gilt für $y > 0$ (also $0 < \mathrm{e}^{-y} < \mathrm{e}^{0} = 1 < \mathrm{e}^{y}$ wegen Monotonie)

$$|\sin(\mathrm{i}y)| = \frac{\mathrm{e}^{y} - \mathrm{e}^{-y}}{2} > \frac{\mathrm{e}^{y}}{2} - \frac{1}{2},$$

$$|\cos(\mathrm{i}y)| = \frac{\mathrm{e}^{y} + \mathrm{e}^{-y}}{2} > \frac{\mathrm{e}^{y}}{2}$$

Da nach Vorlesung $\sup\{\mathrm{e}^{y} : y \in \mathbb{R}\} = \infty$ und $0 < \mathrm{e}^{y} \leqslant 1$ für $y \leqslant 0$, gilt auch $\sup\{\mathrm{e}^{y} : y > 0\} = \infty$. Somit existiert zu jedem $C \in \mathbb{R}$ ein $y_C > 0$ mit $\mathrm{e}^{y_C} > 2C + 1$, also $\frac{\mathrm{e}^{y_C}}{2} > \frac{\mathrm{e}^{y_C}}{2} - \frac{1}{2} > C$ und somit sowohl $|\sin(\mathrm{i}y)| > C$ als auch $|\cos(\mathrm{i}y)| > C$.

Aufgabe 32 (Tutorium)

Zeigen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme die folgenden Formeln für alle $z, w \in \mathbb{C}$.

a) $\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z)$

b) $\cos(2z) = 1 - 2\sin^2(z) = 2\cos^2(z) - 1$

c) $\sin(z) + \sin(w) = 2\sin\left(\frac{z+w}{2}\right)\cos\left(\frac{z-w}{2}\right)$

d) $\cos(z) + \cos(w) = 2\cos\left(\frac{z+w}{2}\right)\cos\left(\frac{z-w}{2}\right)$

Lösungsvorschlag

a) Das Additionstheorem $\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$ liefert für jedes $z \in \mathbb{C}$

$$\sin(2z) = \sin(z+z) = \sin(z)\cos(z) + \cos(z)\sin(z) = 2\sin(z)\cos(z).$$

b) Ebenso folgt aus $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$ die Gleichung

$$\cos(2z) = \cos(z+z) = \cos(z)\cos(z) - \sin(z)\sin(z) = \cos^2(z) - \sin^2(z).$$

Wie wir in **Aufgabe 31 a)** gesehen haben, gilt die aus der Vorlesung bekannte Formel $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$ auch für jedes $z \in \mathbb{C}$. Somit folgt

$$\cos^2(z) - \sin^2(z) = \begin{cases} (1 - \sin^2(z)) - \sin^2(z) = 1 - 2\sin^2(z), \\ \cos^2(z) - (1 - \cos^2(z)) = 2\cos^2(z) - 1\,. \end{cases}$$

c) Nach den bekannten Additionstheoremen und **Aufgabe 31 b)** gilt

$$\sin\left(\frac{z+w}{2}\right) = \sin\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{w}{2}\right) + \cos\left(\frac{z}{2}\right)\sin\left(\frac{w}{2}\right),$$

$$\cos\left(\frac{z \pm w}{2}\right) = \cos\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\pm\frac{w}{2}\right) - \sin\left(\frac{z}{2}\right)\sin\left(\pm\frac{w}{2}\right) = \cos\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{w}{2}\right) \mp \sin\left(\frac{z}{2}\right)\sin\left(\frac{w}{2}\right).$$

Somit folgt

$$\begin{aligned}
2\sin\left(\frac{z+w}{2}\right)\cos\left(\frac{z-w}{2}\right) &= 2\left(\sin\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{w}{2}\right) + \cos\left(\frac{z}{2}\right)\sin\left(\frac{w}{2}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{w}{2}\right) + \sin\left(\frac{z}{2}\right)\sin\left(\frac{w}{2}\right)\right) \\
&= 2\sin\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{z}{2}\right)\cos^2\left(\frac{w}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{w}{2}\right)\cos\left(\frac{w}{2}\right)\sin^2\left(\frac{z}{2}\right) \\
&\quad + 2\sin\left(\frac{w}{2}\right)\cos\left(\frac{w}{2}\right)\cos^2\left(\frac{z}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{z}{2}\right)\sin^2\left(\frac{w}{2}\right) \\
&= 2\sin\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{z}{2}\right)\left(\sin^2\left(\frac{w}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{w}{2}\right)\right) \\
&\quad + 2\sin\left(\frac{w}{2}\right)\cos\left(\frac{w}{2}\right)\left(\sin^2\left(\frac{z}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{z}{2}\right)\right) \\
&\overset{\textbf{a), A27a)}}{=} \sin(z) + \sin(w)
\end{aligned}$$

d) Es gilt

$$\begin{aligned}
2\cos\left(\frac{z+w}{2}\right)\cos\left(\frac{z-w}{2}\right) &= 2\left(\cos\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{w}{2}\right) - \sin\left(\frac{z}{2}\right)\sin\left(\frac{w}{2}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{w}{2}\right) + \sin\left(\frac{z}{2}\right)\sin\left(\frac{w}{2}\right)\right) \\
&= 2\cos^2\left(\frac{z}{2}\right)\cos^2\left(\frac{w}{2}\right) - 2\sin^2\left(\frac{z}{2}\right)\sin^2\left(\frac{w}{2}\right) \\
&\overset{\textbf{A27 a)}}{=} 2\left(1 - \sin^2\left(\frac{z}{2}\right)\right)\left(1 - \sin^2\left(\frac{w}{2}\right)\right) - 2\sin^2\left(\frac{z}{2}\right)\sin^2\left(\frac{w}{2}\right) \\
&= \left(1 - 2\sin^2\left(\frac{z}{2}\right)\right) + \left(1 - 2\sin^2\left(\frac{w}{2}\right)\right) \overset{\textbf{b)}}{=} \cos(z) + \cos(w)
\end{aligned}$$

Aufgabe 33 (Übung)

a) Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergieren die folgenden Potenzreihen? Bestimmen Sie im Falle der Konvergenz den Reihenwert.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$

b) Welche Funktionen von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ werden durch die folgenden Potenzreihen dargestellt?

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)!} z^n$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (z+1)^{2n+2}$

c) Bestimmen Sie jeweils eine Potenzreihenentwicklung der Funktion f um die angegebene Entwicklungsstelle z_0. Wie groß ist dabei der Konvergenzradius?

(i) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \sin z, \quad z_0 = 1$

(ii) $f : \mathbb{C} \setminus \{-1, \frac{1}{2}\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{1-z}{1-z-2z^2}, \quad z_0 = 0$

Hinweis: In Teil (ii) hilft die Gleichung $\frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{\frac{2}{3}}{1+z} + \frac{\frac{1}{3}}{1-2z}$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, \frac{1}{2}\}$ weiter.

Lösungsvorschlag

a) Der Konvergenzradius beider Potenzreihen ist 1, da

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = 1.$$

Somit sind beide Reihen für $|z| < 1$ konvergent und für $|z| > 1$ divergent. Für $|z| = 1$ ist der Betrag der Folgenglieder, also n bzw. n^2, keine Nullfolge, weshalb auch dort Divergenz folgt (siehe auch Vorlesung). Kommen wir nun zum Reihenwert, wobei ab nun $|z| < 1$ vorausgesetzt sei.

(i) Es gilt (siehe Vorlesung)

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} z^{n-k} z^k = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n.$$

Somit folgt $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n = \frac{1}{(1-z)^2}$. Die geforderte Reihe müssen wir nun nur noch leicht umformen, um auf diesen nun bekannten Reihenwert zurückgreifen zu können. Wir berechnen

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^n = z \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} \overset{\text{Index-Shift}}{=} z \cdot \sum_{n \geqslant 0} (n+1) z^n.$$

Somit folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^n = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

(ii) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \Leftrightarrow 2 \sum_{k=0}^{n} k = n^2 + n \Leftrightarrow n^2 = 2\left(\sum_{k=0}^{n} k\right) - n$$

Damit folgt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(2\left(\sum_{k=0}^{n} k\right) - n\right) z^n = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} (z^{n-k})(k z^k) - \sum_{n=0}^{\infty} n z^n = 2\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} k z^k\right) - \sum_{n=0}^{\infty} n z^n$$

Mit Teil **a)** erhalten wir schließlich

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = 2 \cdot \frac{1}{1-z} \cdot \frac{z}{(1-z)^2} - \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{z}{(1-z)^2} \cdot \left(\frac{2}{1-z} - 1\right) = \frac{z}{(1-z)^2} \cdot \frac{1+z}{1-z} = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}.$$

b) (i) Die Potenzreihe lässt sich als Differenz zweier Potenzreihen darstellen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1-2}{(n+1)!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+1)!} z^n .$$

Die erste Reihe ergibt e^z, die zweite liefert für $z = 0$ den Wert 2 und für $z \neq 0$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+1)!} z^n = \frac{2}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} z^{n+1} = \frac{2}{z} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \frac{2}{z}\left(\mathrm{e}^z - 1\right).$$

Insgesamt folgt: Die von $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)!} z^n$ dargestellte Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist gegeben durch

$$f(0) = \mathrm{e}^0 - 2 = -1 , \qquad f(z) = \mathrm{e}^z - \frac{2\mathrm{e}^z - 2}{z} = \frac{(z-2)\mathrm{e}^z + 2}{z} \quad (z \neq 0).$$

(ii) Hier ergibt sich gemäß der Reihendarstellung der Sinus-Funktion für jedes $z \in \mathbb{C}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z+1)^{2n+2} = (z+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z+1)^{2n+1} = (z+1)\sin(z+1).$$

c) (i) Wir kennen die Potenzreihen für $\sin z$ und $\cos z$ um die Entwicklungsstelle 0. In Verbindung mit dem Additionstheorem für $\sin z$ ergibt sich für jedes $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} f(z) &= \sin(1 + (z-1)) = \sin(1)\cos(z-1) + \cos(1)\sin(z-1) \\ &= \sin(1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(z-1)^{2k} + \cos(1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(z-1)^{2k+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n \end{aligned}$$

mit

$$a_n := \begin{cases} \sin(1)\,\frac{(-1)^{n/2}}{n!}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \cos(1)\,\frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n!}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Der Konvergenzradius der Reihe ist offensichtlich ∞.

(ii) Für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, \frac{1}{2}\}$ erhalten wir unter Verwendung des Hinweises

$$f(z) = \frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{2/3}{1+z} + \frac{1/3}{1-2z} = \frac{2}{3}\frac{1}{1-(-z)} + \frac{1}{3}\frac{1}{1-(2z)} .$$

Für $|z| < 1$ gilt

$$\frac{2}{3}\frac{1}{1-(-z)} = \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n$$

und für $|2z| < 1$ ist

$$\frac{1}{3}\frac{1}{1-(2z)} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(2z)^n .$$

Hiermit folgt für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \min\{1, \frac{1}{2}\} = \frac{1}{2}$

$$f(z) = \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(2z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

mit $a_n := \frac{2}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n = \frac{1}{3}(2(-1)^n + 2^n)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Wegen $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 2$ beträgt der Konvergenzradius der Potenzreihe $2^{-1} = \frac{1}{2}$.

Bemerkung: Die Darstellung $\frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{2/3}{1+z} + \frac{1/3}{1-2z}$ kann man auf die folgende Weise erhalten ($\rightarrow$ Partialbruchzerlegung): Wegen $1 - z - 2z^2 = (1+z)(1-2z)$ machen wir den Ansatz

$$\frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{a}{1+z} + \frac{b}{1-2z}$$

und müssen die Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ berechnen. Die rechte Seite dieser Gleichung liefert

$$\frac{a}{1+z} + \frac{b}{1-2z} = \frac{a(1-2z) + b(1+z)}{(1+z)(1-2z)} = \frac{a + b + (-2a+b)z}{1-z-2z^2}.$$

Die Darstellung gelingt also, wenn $a + b = 1$ und $-2a + b = -1$ sind. Dies bedeutet $a = \frac{2}{3}$ und $b = \frac{1}{3}$.

Aufgabe 34 (Tutorium)

Für welche $x \in \mathbb{R}$ bzw. $z \in \mathbb{C}$ konvergieren die folgenden Potenzreihen?

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2} x^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}(z - 2\mathrm{i})^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{n(1+(-1)^n)} x^{2n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) z^n$

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n^2}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3\mathrm{i})^n}{n^2}$

Lösungsvorschlag

a) Für $a_n := (2n+1)/(n-1)^2$ gilt

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{2n+1}{(n-1)^2} \cdot \frac{n^2}{2n+3} = \frac{2 + 1/n}{(1-1/n)^2} \cdot \frac{1}{2 + 3/n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{2} = 1.$$

Die Reihe hat daher den Konvergenzradius 1. Wir müssen nun noch die Ränder des Konvergenzintervalls, also $x = -1$ und $x = 1$, untersuchen. Dies liefert die zwei Reihen

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2}(-1)^n \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2}.$$

Die Konvergenz der ersten Reihe wird durch das Leibnizkriterium garantiert, denn

$$a_n = \frac{2n+1}{(n-1)^2} = \frac{2(n-1)+3}{(n-1)^2} = \frac{2}{n-1} + \frac{3}{(n-1)^2} \geqslant \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} = \frac{2n+3}{n^2} = a_{n+1}.$$

Die zweite Reihe hingegen divergiert wegen $a_n \geqslant 2n/n^2 = 2/n$ und des Minorantenkriteriums. Insgesamt: Die Reihe konvergiert nur für $x \in [-1,1)$.

b) Wegen $\sqrt[n]{|1/n^n|} = 1/n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ hat diese Reihe den Konvergenzradius ∞, d. h. sie konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.

c) Die Reihe hat die Form $\sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k$ mit $a_{2n} = \mathrm{e}^{n(1+(-1)^n)}$ und $a_{2n+1} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit ist

$$\sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \sqrt[2n]{|\mathrm{e}^{n(1+(-1)^n)}|} = \begin{cases} \mathrm{e}^{2n/2n} = \mathrm{e}, & n \text{ gerade}, \\ \mathrm{e}^{0/2n} = 1, & n \text{ ungerade}, \end{cases}$$

und wegen $\sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = e$, d. h. die Potenzreihe hat den Konvergenzradius e^{-1}. Für $x = \pm\mathrm{e}^{-1}$ ergibt sich die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{n(1+(-1)^n)}\mathrm{e}^{-2n}.$$

Diese Reihe ist divergent, da für gerades n gilt: $\mathrm{e}^{n(1+(-1)^n)}\mathrm{e}^{-2n} = \mathrm{e}^{2n}\mathrm{e}^{-2n} = 1 \not\to 0$ $(n \to \infty)$. Die Potenzreihe konvergiert daher nur für $x \in (-e^{-1}, e^{-1})$.

Bemerkung: Man kann auch $y := x^2$ setzen und $\sum_{n=1}^{\infty} e^{n(1+(-1)^n)} y^n$ betrachten. Diese Reihe hat Konvergenzradius e^{-2}, d.h. sie ist konvergent für $|y| < e^{-2}$ und divergent für $|y| > e^{-2}$. Hieraus folgt dann Konvergenz für $|x| < e^{-1}$ und Divergenz für $|x| > e^{-1}$.

d) Für $a_n := 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ gilt offenbar $1 \leqslant a_n \leq n$. Wegen $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ folgt hieraus $\sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow{n\to\infty} 1$. Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ hat also den Konvergenzradius $R = 1^{-1} = 1$. Für $|z| = 1$ konvergiert die Reihe nicht, denn dann gilt $|a_n z^n| = a_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, d. h. die Reihenglieder konvergieren nicht gegen 0. Konvergenz der Reihe liegt also nur für $|z| < 1$ vor.

e) Auch diese Potenzreihe hat den Konvergenzradius 1, denn

$$\sqrt[n]{|2^n z^{n^2}|} = \sqrt[n]{2^n} \cdot \sqrt[n]{|z|^{n^2}} = 2|z|^n \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} 0, & |z| < 1, \\ \infty, & |z| > 1. \end{cases}$$

Auf dem Rand des Konvergenzkreises liegt keine Konvergenz vor, denn für $|z| = 1$ gilt $|2^n z^{n^2}| = 2^n \not\to 0$ $(n \to \infty)$. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n^2}$ konvergiert somit nur für $|z| < 1$.

f) Für den Konvergenzradius R von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3i)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z+3i)^n$ mit $a_n := \frac{1}{n^2}$ ergibt sich wegen

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = 1$$

$R = 1^{-1} = 1$. Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3i)^n}{n^2}$ konvergiert also für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z+3i| < 1$ und divergiert für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z+3i| > 1$. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z+3i| = 1$ gilt

$$\left|\frac{(z+3i)^n}{n^2}\right| = \frac{|z+3i|^n}{n^2} = \frac{1}{n^2} \qquad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}.$$

Wegen der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3i)^n}{n^2}$ für $|z+3i| = 1$ nach dem Majorantenkriterium konvergent. Also konvergiert die Reihe genau für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z+3i| \leq 1$.

Aufgabe 35 (Übung)

a) Es sei

$$b(x) = \begin{cases} 1+x & \text{für } x \in [-1,0], \\ 1-x & \text{für } x \in (0,1], \\ 0 & \text{für } x < -1 \text{ oder } x > 1. \end{cases}$$

Wir definieren $f_n(x) = b(x-n)$ und $g_n(x) = \frac{f_n(x)}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Untersuchen Sie die Funktionenfolgen (f_n) und (g_n) auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

b) Sei $h_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [0,\infty)$. Untersuchen Sie die Funktionenfolge (h_n) auf punktweise Konvergenz. Wieso kann sie nicht gleichmäßig konvergieren? Konvergiert sie auf $(0,\infty)$ bzw. $[a,\infty)$ mit $a > 0$ gleichmäßig?

Lösungsvorschlag

a) Für $x < -1$ gilt $f_n(x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $x \in [N-1, N)$ für ein $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$f_n(x) = 0 \Leftrightarrow b(x-n) = 0 \Leftarrow x - n < -1 \Leftarrow n > x+1 > N.$$

Somit gilt, dass (f_n) und somit auch (g_n) auf $\mathbb{R}$ punktweise gegen die Nullfunktion konvergieren. (f_n) konvergiert jedoch nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion, denn für jedes $\varepsilon \in (0,1]$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ finden wir ein $x_n \in \mathbb{R}$ (nämlich $x_n := n$) mit

$$|f_n(x_n) - 0| = |f_n(n)| = |b(0)| = 1 \geqslant \varepsilon.$$

(g_n) jedoch konvergiert gleichmäßig gegen die Nullfunktion, denn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$|g_n(x) - 0| = \left|\frac{b(x-n)}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Da wir den anfänglichen Betrag unabhängig von x nach oben abgeschätzt haben gegen eine Nullfolge, ergibt sich die gleichmäßige Konvergenz (Satz 7.18 (1)).

b) Es gilt $h_n(0) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $x > 0$ fest gilt

$$h_n(x) = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n} + x} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Somit konvergiert (h_n) punktweise gegen die Grenzfunktion

$$h(x) := \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

Diese ist nicht stetig ($h(\frac{1}{n}) = 0 \neq 1 = h(0)$), womit die Konvergenz nicht gleichmäßig sein kann (Satz 8.3). Auch auf $(0,\infty)$ ist die Konvergenz nicht gleichmäßig, da für jedes $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}]$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n > 0$ existiert (nämlich $x_n := \frac{1}{n}$) mit

$$|h_n(x_n) - 0| = \left|\frac{1}{1+1}\right| = \frac{1}{2} \geqslant \varepsilon.$$

Auf $[a,\infty)$ für $a>0$ ist die Konvergenz jedoch gleichmäßig, denn für jedes $x \geqslant a$ gilt

$$|h_n(x)-0| = \left|\frac{1}{1+nx}\right| \leqslant \frac{1}{1+na} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+a} \to 0 \quad (n\to\infty).$$

Da die letzte Folge wieder unabhängig von x ist und gegen Null konvergiert, ist die gleichmäßige Konvergenz gezeigt (Satz 7.18 (1)).

Aufgabe 36 (Tutorium)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen und -reihen jeweils auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz auf den angegebenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$).

a) $f_n(x) = \sqrt[n]{n^2 x}$, $\quad x \in [a,1]$, $0<a<1$,

b) $g_n(x) = nx(1-x)^n$, $\quad x \in [0,1]$,

c) $\sum_{n=1}^\infty h_n(x)$, $h_n(x) = x^n(1-x)$, $\quad x \in (-1,1]$,

d) $\sum_{n=1}^\infty i_n(x)$, $i_n(x) = \frac{1}{n^2+x^2}$, $\quad x \in \mathbb{R}$.

Lösungsvorschlag

a) Sei zunächst $0<a<1$ und $x \in [a,1]$ fest. Dann gilt:

$$h_n(x) = \sqrt[n]{n^2 x} \to 1 \qquad (n\to\infty)$$

Also konvergiert (h_n) gegen die konstante Einsfuktion für $n\to\infty$. Da für alle $x\in[a,1]$ sowie alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$\begin{aligned}|h_n(x)-1| &= |\sqrt[n]{n^2x}-1| = |\sqrt[n]{n^2x}-\sqrt[n]{n^2a}+\sqrt[n]{n^2a}-1| \leq |\sqrt[n]{n^2x}-\sqrt[n]{n^2a}|+|\sqrt[n]{n^2a}-1| \\ &\overset{x\geqslant a}{=} \sqrt[n]{n^2x}-\sqrt[n]{n^2a}+|\sqrt[n]{n^2a}-1| \overset{x\leqslant 1}{\leq} \sqrt[n]{n^2}-\sqrt[n]{n^2a}+|\sqrt[n]{n^2a}-1| =: \alpha_n\end{aligned}$$

und $\alpha_n \to 0$ für $n\to\infty$, ist die Funktionenfolge (h_n) gleichmäßig konvergent.

Sei nun $a=0$. Es gilt $h_n(0)=0$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Für $x\neq 0$ gilt, mit der gleichen Rechnung wie oben, $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = 1$. Deshalb konvergiert (h_n) punktweise gegen h, wobei $h:[0,1]\to\mathbb{R}$ durch

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x=0, \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

erklärt ist. Weil h nicht stetig in 0 ist, kann die Konvergenz nicht gleichmäßig sein (Satz 8.3)

b) Offenbar gilt $f_n(0)=0$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Für $x\in(0,1]$ ist $q := 1-x \in [0,1)$ und es ergibt sich

$$f_n(x) = nxq^n \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

(Wegen $\sqrt[n]{nq^n} \to q < 1$ für $n\to\infty$ konvergiert die Reihe über nq^n, was dann $nq^n \to 0$ für $n\to\infty$ impliziert.) Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert also punktweise gegen die Funktion $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=0$ für alle $x\in[0,1]$.

Obwohl diese Grenzfunktion stetig ist, liegt keine gleichmäßige Konvergenz vor. Es gilt

$$f_n(\tfrac{1}{n}) = n\cdot\tfrac{1}{n}\cdot(1-\tfrac{1}{n})^n = (1-\tfrac{1}{n})^n \xrightarrow{n\to\infty} e^{-1}$$

(vgl. **Aufgabe 19 b)**, 3. Übungsblatt). Also gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $f_n(\frac{1}{n}) > \frac{e^{-1}}{2}$ für $n \geqslant N$. Zu jedem $\varepsilon \in (0, \frac{e^{-1}}{2}]$ und jedem $n \geqslant N$ existiert also ein $x_n \in (0,1]$ (nämlich $x_n := \frac{1}{n}$) mit

$$|f_n(x_n) - 0| = f_n(x_n) > \frac{e^{-1}}{2} \geqslant \varepsilon.$$

Das schließt die gleichmäßige Konvergenz aus.

c) Setzt man $x = 1$ in $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$ ein, so ergibt sich der Wert 0. Für jedes $x \in (-1,1)$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x) = (1-x)\sum_{n=1}^{\infty} x^n = (1-x)x\sum_{k=0}^{\infty} x^k = x(1-x)\cdot\frac{1}{1-x} = x.$$

Die Funktionenreihe konvergiert also punktweise gegen die Funktion $f : (-1,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 1, \\ x, & x \in (-1,1). \end{cases}$$

Da diese Funktion, im Gegensatz zu den Partialsummenfunktionen $s_N : (-1,1] \to \mathbb{R}$, die durch $s_N(x) := \sum_{n=1}^{N} x^n(1-x)$ gegeben sind, nicht stetig in $x = 1$ ist, liegt keine gleichmäßige Konvergenz vor.

Bemerkung: Auch auf dem Intervall $(-1,1)$ liegt keine gleichmäßige Konvergenz vor: Für jedes $N \in \mathbb{N}$ und $x \in (-1,1)$ gilt

$$\left|s_N(x) - f(x)\right| = \left|(1-x)x\sum_{n=0}^{N-1} x^n - x\right| = \left|(1-x)x\frac{1-x^N}{1-x} - x\right| = |-x^{N+1}| = |x|^{N+1}$$

sowie

$$|x|^{N+1} \geqslant \frac{1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad |x| \geqslant \frac{1}{\sqrt[N+1]{2}}.$$

Obige Rechnung zeigt: Ist $\varepsilon = \frac{1}{2}$ gesetzt, dann finden wir zu jedem $N \in \mathbb{N}$ ein $x \in (-1,1)$ (etwa $x = \frac{1}{\sqrt[N+1]{2}}$) so, dass $|s_N(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon$ gilt. Dies schließt gleichmäßige Konvergenz aus.

d) Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ haben wir

$$\left|\frac{1}{x^2+n^2}\right| = \frac{1}{x^2+n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, folgt nach Satz 7.18 (2): Die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$ konvergiert gleichmäßig und damit auch punktweise auf $\mathbb{R}$.