Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger

WS 2018/2019
21.02.2019

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Bachelor-Modulprüfung

Aufgabe 1 (6+8+6=20 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

b) Sei (a_n) eine beschränkte Folge mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{a_n}{\sum_{k=1}^{n} a_k} \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Hinweis: Unterscheiden Sie danach, ob $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$ beschränkt oder unbeschränkt ist.

c) Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$$

konvergiert.

Aufgabe 2 (8+8+4=20 Punkte)

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \mathrm{e}^{-x^2/4} \sin(8/x^3) & , x \neq 0, \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass f differenzierbar auf $\mathbb{R}$ ist und die Ableitung durch

$$f'(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x^2/4}\left(4x^3 \sin(8/x^3) - \frac{x^5}{2}\sin(8/x^3) - 24\cos(8/x^3)\right) & , x \neq 0, \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$$

gegeben ist. Begründen Sie ihre Rechnung dabei ausführlich.

b) Zeigen Sie, dass $|f'(x)| < 24$ für alle $x \in [-1,1]$. Finden Sie danach passende Folgen, um zu beweisen, dass $\sup_{x\in[-1,1]} f'(x) = 24$ und $\inf_{x\in[-1,1]} f'(x) = -24$.
Hinweis: Nutzen Sie für die erste Ungleichung $\mathrm{e}^{y^2} \geqslant 1 + y^2$ und für einen Teil der Potenzen von x die Tatsache, dass $|x| \leqslant 1$ ist.

c) Verwenden Sie Teil **b)**, um f' auf Stetigkeit zu untersuchen.

— bitte wenden —

Aufgabe 3 (6+6+4+4=20 Punkte)

a) Für $n \in \mathbb{N}$ seien die Funktionen

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2},$$

gegeben. Zeigen Sie, dass (f_n) gleichmäßig, (f_n') jedoch nur punktweise konvergiert und geben Sie jeweils die Grenzfunktion an.
Hinweis: Beachten Sie für (f_n) die Ungleichung $0 \leqslant (1-\sqrt{n}|x|)^2$.

b) Zeigen Sie, dass die Gleichung $x(x-\sin(x)) = \cos(x)$ genau zwei Lösungen in $[-\pi, \pi]$ besitzt.

c) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x\to 0+} \frac{\log(\sqrt{x})}{e^{\frac{1}{x^2}}}$ und folgern sie daraus, dass

$$\lim_{x\to 0+} (\sqrt{x})^{e^{-1/x^2}} = 1.$$

d) Beweisen Sie die Monotonie der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^x (1+4t)e^{t^2}\, dt + xe^{x^2}.$$

Aufgabe 4 (6+6+8=20 Punkte)

a) Finden Sie die maximale Lösung des Anfangswertproblems.

$$y' = -\frac{1}{x}\frac{y^2+6y+5}{2y+6}, \qquad y(1) = 0.$$

b) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

divergiert.
Hinweis: Nutzen Sie die Substitution $y = \frac{1}{x}$.

c) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ den Kern der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 10 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Viel Erfolg!

Hinweise für nach der Klausur:

- Die **Ergebnisse** der Modulprüfung werden am Freitag, den **24.04.2019**, am schwarzen Brett neben Zimmer 2.027 im Mathematikgebäude (Geb. 20.30) veröffentlicht.
- Die **Einsichtnahme** in die korrigierten Modulprüfungen findet am Donnerstag, den **02.05.2019**, von **16 bis 18 Uhr** im Messtechnik-Hörsaal (Geb. 30.33) statt.
- Die **mündlichen Nachprüfungen** finden in der Woche vom **13.05.2019** bis **17.05.2019** statt.