UNIVERSITÄT KARLSRUHE
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl. Math. Alexander Ullmann

SS 2008
24.04.2008

2. Übungsblatt

Höhere Mathematik II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Abgabe: bis Freitag, den 02.05.2008, 11.30 Uhr, neben Raum 305

Aufgabe 5 (K)

(1) Untersuchen Sie die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ jeweils auf Beschränktheit, Offenheit, Abgeschlossenheit und Kompaktheit.

a) $\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leqslant y\leqslant 1-x^2\,\}$, **b)** $\{\,(x,y)\in\mathbb{Q}^2 : \|(x,y)\|\leqslant 42\,\}$,
c) $\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<4\,,\ x\leqslant 3\,\}$, **d)** $\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0\,,\ |x-y|\leqslant 1\,\}$.

(2) Es sei $f\in C(\mathbb{R})$. Zeigen Sie:

a) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y<f(x)\}$ ist offen, **b)** $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\leq f(x)\}$ ist abgeschlossen.

Aufgabe 6

Bestimmen Sie sämtliche Häufungswerte der angegebenen Folgen, und untersuchen Sie die Folgen auf Beschränktheit und Konvergenz.

a) $a^{(k)} := \left(k^{(-1)^k}, k^{(-1)^{k+1}}\right)\,,\quad k\in\mathbb{N}$ **b)** $b^{(k)} := a^{(k)}/\|a^{(k)}\|\,,\quad k\in\mathbb{N}$

c) $c_k := a^{(k)}\cdot a^{(k+1)}\,,\quad k\in\mathbb{N}$ **d)** $d^{(k)} := \left(c_k, k^{(-1)^k}\right)\,,\quad k\in\mathbb{N}$

Aufgabe 7 (K)

(1) Untersuchen Sie jeweils, ob $f(x,y)$ für $(x,y)\to(0,0)$ konvergiert, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

a) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$, **b)** $f(x,y)=\dfrac{xy}{e^{x^2}-1}$.

(2) Welche der folgenden Funktionen sind an der Stelle $(0,0)$ stetig?

a) $$f(x,y)=\begin{cases}(1+|xy|)^{\frac{1}{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 1, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

b) $$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2}\sin(x-y), & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

— bitte wenden —

Aufgabe 8

a) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei durch $f(0,0) := 1$ und

$$f(x,y) := \frac{x^2 + y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$$

für $(x,y) \neq (0,0)$ gegeben. Beweisen Sie, dass dann die beiden Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0}\Big(\lim_{y\to 0} f(x,y)\Big) \qquad \text{und} \qquad \lim_{y\to 0}\Big(\lim_{x\to 0} f(x,y)\Big)$$

existieren und mit $f(0,0)$ übereinstimmen, obwohl f in $(0,0)$ unstetig ist.

b) Die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wird definiert durch

$$g(x,y) := \begin{cases} x^2/y\,, & x^2 < y\,, \\ y/x^2\,, & 0 < y \leqslant x^2\,, \\ 0\,, & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Zeigen Sie: Diese Funktion ist auf ganz $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig und in $(0,0)$ unstetig. Ist $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, so ergibt sich dennoch $g(ta,tb) \to 0$ für $t \to 0$.