UNIVERSITÄT KARLSRUHE
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl. Math. Alexander Ullmann

SS 2008
10.07.2008

13. Übungsblatt

Höhere Mathematik II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Abgabe: bis Donnerstag, den 17.07.2008, 11.30 Uhr, neben Raum 305

Aufgabe 49 (K)

a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stückweise stetige und absolut integrierbare Funktion, $s_0 \in \mathbb{R}$ und $a > 0$. Zeigen Sie für $g(t) := e^{-is_0 t} f(t)$ und $h(t) := f(at)$ die Gleichungen

$$\widehat{g}(s) = \widehat{f}(s + s_0) \qquad \text{und} \qquad \widehat{h}(s) = \frac{\widehat{f}(s/a)}{a}\,.$$

b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stetige, stückweise glatte und absolut integrierbare Funktion. Zeigen Sie, daß f genau dann gerade ist, wenn $\widehat{f}$ gerade ist.

Aufgabe 50 (K)

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ wird definiert durch $f(t) := \max\{0, 1 - t^2\}$.

a) Berechnen Sie $\widehat{f}(s)$ für alle $s \in \mathbb{R}$.

b) Es sei $f_n(t) := nf(nt)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie für alle $s \in \mathbb{R}$

$$\widehat{f_n}(s) \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} \widehat{f_n}(s)\,.$$

Aufgabe 51

a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare und absolut integrierbare Funktion so, daß die Funktion $tf : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \tau \mapsto \tau f(\tau)$ auch absolut integrierbar ist. Zeigen Sie, daß dann f differenzierbar ist mit $(\widehat{f}\,)' = -i \cdot \widehat{tf}$. *Hinweis: Sie können ohne Beweis verwenden, daß Sie in dieser Situation die Reihenfolge von Differentiation und Integration vertauschen dürfen.*

b) Definiere $\varphi(t) := e^{-t^2/2}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß $\widehat{\varphi}$ der gleichen Differentialgleichung wie φ genügt, und folgern Sie $\widehat{\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\varphi$.

c) Sei $a > 0$ und $\varphi_a(t) := e^{-at^2}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: $\widehat{\varphi_a}(s) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a}}\, e^{-\frac{s^2}{4a}}$.

Aufgabe 52

Die Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sei beliebig oft differenzierbar und es gelte $\varphi(t) = 0$ für $|t| \geqslant 1$. Zeigen Sie, daß dann $s \mapsto s^n \widehat{\varphi}(s)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine beschränkte Funktion ist.

Tabelle zur Laplacetransformation

f	$\mathscr{L}[f]$	f	$\mathscr{L}[f]$
1	$\frac{1}{s}$	$e^{bt}\sinh(at)$	$\frac{a}{(s-b)^2-a^2}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$e^{bt}\cosh at$	$\frac{s-b}{(s-b)^2-a^2}$
$t^n, \quad n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$t\sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$t\cos(at)$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
$\frac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)!}, \quad n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{(s-a)^n}$	$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$f^{(n)}(t) \quad n \in \mathbb{N}$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\int_0^t f(u)du$	$\frac{F(s)}{s}$
$e^{bt}\sin(at)$	$\frac{a}{(s-b)^2+a^2}$	$\int_0^t f_1(u)f_2(t-u)du$	$F_1(s)\cdot F_2(s)$
$e^{bt}\cos(at)$	$\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$	$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\frac{1}{a}f\left(\frac{t}{a}\right), \quad a > 0$	$F(as)$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$af_1(t) + bf_2(t)$	$aF_1(s) + bF_2(s)$

Denken Sie bitte daran:

Anmeldeschluss für die Herbstklausuren:

Mittwoch, 30. Juli 2008